

# Weryfikacja numeryczna modelu propagacji fal ciepłych w płynącym gazie

MACIEJ BUJALSKI, ANDRZEJ RACHALSKI

*Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków*

## Streszczenie

Fale ciepłe w poruszającym się płynie mogą być wykorzystane do absolutnego pomiaru bardzo małych prędkości przepływu. W pracy przedstawiono numeryczne rozwiązanie modelu propagacji fal ciepłych w płynącym powietrzu metodą siatek. Analizie poddano dwuwymiarowy rozkład temperatury za liniowym źródłem fali o wymuszeniu sinusoidalnym i prostokątnym. Otrzymano wartości przesunięcia fazy amplitudy fali ciepłej zarejestrowanych na dwóch detektorach. Obliczenia prowadzono przy prostopadłej orientacji liniowego źródła fali względem wektora prędkości przepływu. Wyniki analizy numerycznej porównano z rozwiązaniem analitycznym oraz danymi eksperymentalnymi.

**Słowa kluczowe:** fale ciepłe, pomiar prędkości przepływu, niestacjonarne równanie transportu ciepła

## 1. Wstęp

Metoda fal ciepłych jest stosowana do pomiaru prędkości przepływu gazów i cieczy oraz współczynnika dyfuzyjności termicznej (w nieruchomym medium). Pomiar prędkości przepływu tą techniką polega na generacji w badanym przepływie fali ciepłej o zadanych parametrach, odbieraniu sygnału temperaturowego w wybranych punktach oraz wyznaczeniu mierzonego parametru w oparciu o przyjęty model zjawiska (Kiełbasa, 1975, 2005). W ustalonym strumieniu powietrza źródłem fali ciepłej jest nagrzewane periodycznie włókno stosowane powszechnie w termoanemometrach. W pewnej odległości od tego źródła (zgodnie z kierunkiem przepływu) umieszcza się jeden lub dwa detektory fali, w postaci termometrów rezystancyjnych. Na podstawie przesunięcia fazowego fali o zadanej częstotliwości pomiędzy detektorami określić można prędkość przepływu.

## 2. Podstawy teoretyczne

Zjawisko propagacji fal ciepłych w opływającym źródło gazie z wektorem prędkości  $\vec{U}$  opisuje równanie zachowania energii, które w tym przypadku przyjmuje postać niestacjonarnego równania adwekcji-konwekcji:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa \cdot \nabla T) + \frac{Q}{\rho c} \quad (1)$$

gdzie:

- $T$  – temperatura medium,
- $\kappa$  – współczynnik dyfuzyjności termicznej,
- $\rho$  – gęstość,
- $c$  – ciepło właściwe,
- $Q$  – gęstość mocy źródła.

Zakładając, że analizie podlega dwuwymiarowa płaszczyzna  $x$ - $y$  (Rys. 1), pole prędkości wokół nadajnika jest niezaburzone, przepływ zachodzi tylko w kierunku osi  $x$   $\vec{U} = (u, 0, 0)$  oraz intensywność źródła jest na tyle mała,

że wywołany przyrost temperatury nie zmienia jego termofizycznych właściwości, równanie (1) przedstawić można w następującej postaci:

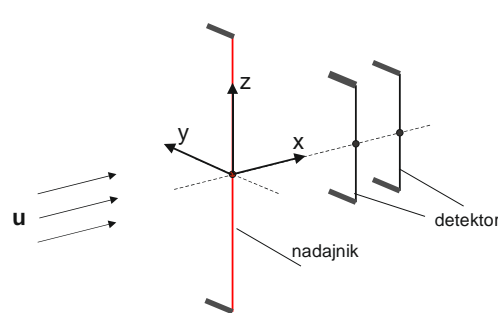
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{Q}{\rho c} \quad (2)$$

Dla sinusoidalnego źródła fali i stałego współczynnika dyfuzyjności termicznej, Kiełbasa (1975) przedstawił rozwiązanie analityczne na przesunięcie fazowe fali temperaturowej – pomiędzy dwoma detektorami na drodze  $\Delta x$  (Rys. 1) w postaci:

$$\Delta\varphi = \frac{u\Delta x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{u^4}} - 1 \right)} \quad (3)$$

gdzie:  $\omega$  – częstość fali cieplnej.

Gdy  $\frac{16\kappa^2 \omega^2}{u^4} \ll 1$  otrzymać można zależność (4), łączącą przesunięcie fazy fali, częstość źródła, odległość między detektorami i prędkość fazową fali. Z tego równania wyznaczyć można prędkość przepływu gazu przy założeniu, że prędkości gazu jest równa prędkości fali cieplnej. Jeżeli nierówność powyższa nie jest spełniona, to prędkość gazu można wyznaczyć w sposób absolutny na podstawie zależności (3), mierząc przesunięcie fazowe dla różnych częstotliwości fali, a następnie dopasowując dane pomiarowe do zależności teoretycznej metodą estymacji nieliniowej (Rachalski, 2013).

$$\Delta\varphi = \frac{\omega\Delta x}{u} \quad (4)$$


Rys. 1. Konfiguracja przestrzenna detektorów względem nadajnika w przepływie

### 3. Rozwiązanie numeryczne

Równanie różniczkowe (2) rozwiązywano metodą różnic skończonych. Region rozwiązania zdyskretyzowano równomierną siatką węzłów i zastąpiono pochodne odpowiednimi ilorazami różnicowymi, zgodnie z równaniem (5).

$$\frac{T_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta x} = \kappa \left( \frac{T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k - 2T_{i,j}^k}{\Delta x} + \frac{T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k - 2T_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \quad (5)$$

gdzie:

- $i, j$  – numer węzła w kierunku odpowiednio osi  $x$  oraz  $y$ ,
- $k$  – poziom czasowy,
- $\Delta x$  – krok przestrzenny,
- $\Delta t$  – krok czasowy.

W tej zależności występuje tylko jedna niewiadoma  $T_{i,j}^{k+1}$ , którą można określić znając temperatury w węzłach sąsiednich w poprzednim przedziale czasu. Metoda ta, określana schematem różnicowym jawnym (Eulera) (Wiśniewski S. i Wiśniewski T., 2000) jest warunkowo stabilna. Wprowadzając do rozważań bezwymiarowe parametry – siatkową liczbę Fouriera  $\tau$  (zależność 6) oraz liczbę Couranta  $v$  (zależność 7) otrzymać można warunek na stabilność rozwiązania w kolejnych krokach czasowych. Dla przypadku dwuwymiarowego liczba Fouriera nie powinna być większa od 0.25. Ponadto, w przypadku istnienia członu konwekcyjnego w równaniu transportu ciepła spełniony musi być warunek CFL (Warunek Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego) – liczba Couranta  $v$  powinna być mniejsza bądź równa 1 (Patankar, 1980).

$$\tau = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (6)$$

$$\nu = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (7)$$

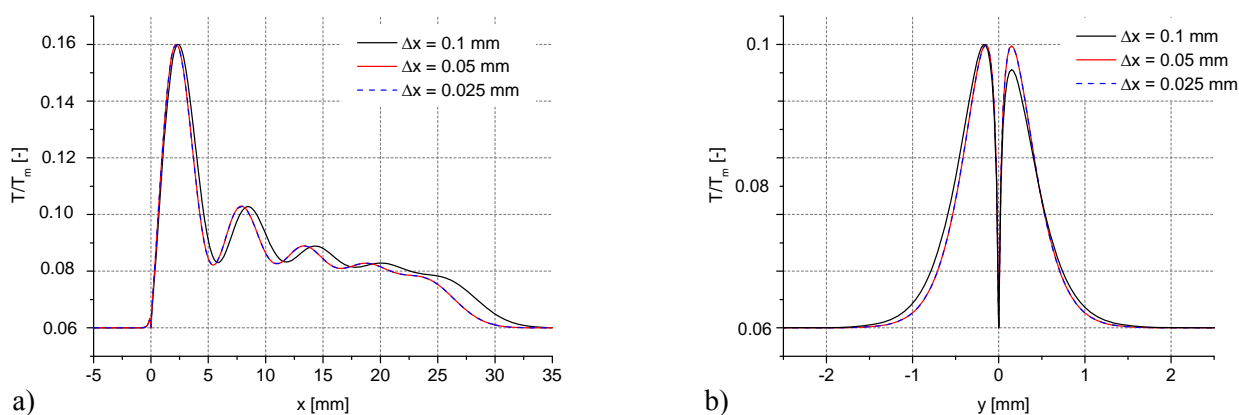
Równanie (5) rozwiązywano dla prędkości przepływu  $u$  w zakresie 10-60 cm/s, po przyjęciu dyfuzyjności temperaturowej powietrza  $\kappa = 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Jako warunek początkowy przyjęto, że temperatura w całym analizowanym rejonie jest równa temperaturze otoczenia  $T_o = 20^\circ\text{C}$ . Na brzegach dwuwymiarowego obszaru (płaszczyzna  $x$ - $y$  na Rys. 1) o wymiarach  $40 \times 10 \text{ mm}$  założono, że temperatura pozostaje niezmienna w czasie i jest równa temperaturze  $T_o$ . Na źródle fali cieplnej (węzeł siatki zlokalizowany w miejscu nadajnika) założono następujący warunek brzegowy (zależność 8 i 9 odpowiednio dla wymuszenia sinusoidalnego i prostokątnego):

$$T(x=0, y=0, t) = \frac{T_m - T_o}{2} \left( 1 + \sin \left( 2\pi ft - \frac{\pi}{2} \right) \right) + T_o \quad (8)$$

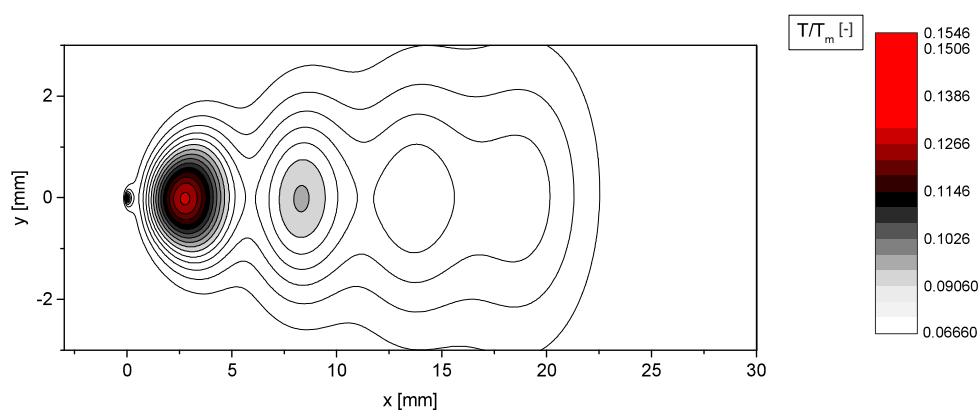
$$T(x=0, y=0, t) = \frac{T_m - T_o}{2} \left( 1 + \text{sgn} \left( \sin \left( 2\pi ft \right) \right) \right) + T_o \quad (9)$$

gdzie:  $T_m = 300^\circ\text{C}$  – maksymalna temperatura na nadajniku.

Na Rys. 2 przedstawiono chwilowy profil (po czasie odpowiadającym 10 okresom wymuszenia sinusoidalnego o częstotliwości  $f = 40 \text{ Hz}$ ) podłużny (dla  $y = 0$ ) i poprzeczny (dla  $x = 0$ ) znormalizowanej temperatury względem wartości  $T_m$  w zależności od wartości kroku przestrzennego, przy prędkości przepływu  $u = 20 \text{ cm/s}$ . Na tej podstawie dalsze obliczenia numeryczne prowadzono z krokiem przestrzennym  $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ mm}$ . Krok czasowy dobrano tak, aby spełnić kryterium stabilności –  $\Delta t = 3,125 \mu\text{s}$ . Na Rys. 3 przedstawiono wizualizację pola temperatury dla tego przypadku, w pobliżu nadajnika fali w postaci wykresu konturowego.

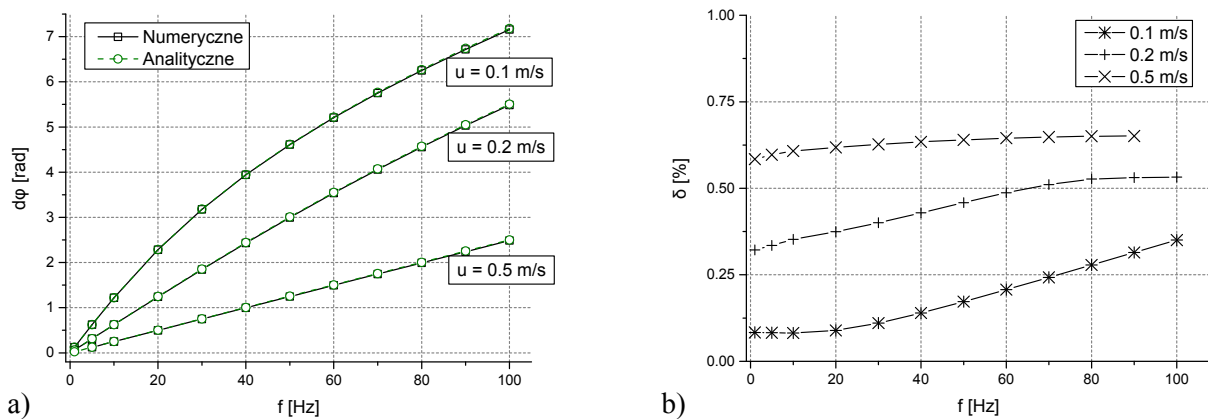


Rys. 2. Chwilowy profil podłużny (a) i profil poprzeczny (b) znormalizowanej temperatury

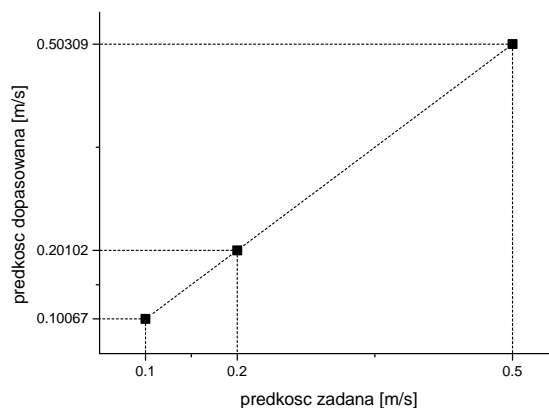


Rys. 3. Chwilowy rozkład temperatury wokół źródła o wymuszeniu sinusoidalnym

W pewnej odległości od nadajnika znajdują się dwa detektory. Przyjęto, że detektor pierwszy znajduje się w odległości 3 mm, a detektor drugi w odległości 5 mm za źródłem fali cieplnej (Rys. 1). W punktach tych rejestrowano wartości temperatury w kolejnych krokach czasowych. Otrzymane sygnały poddano analizie spektralnej, stosując algorytm szybkiej transformaty FFT. Na tej podstawie obliczono przesunięcie fazowe fali pomiędzy dwoma detektorami. Na Rys. 4 porównano wyniki obliczeń numerycznych przesunięć fazowych z rozwiązaniem analitycznym podanym we wzorze (3), dla fali sinusoidalnej w zależności od częstotliwości oraz prędkości przepływu powietrza. Wyznaczone przesunięcia fazowe dla różnych częstotliwości fali sinusoidalnej dopasowano metodą regresji nieliniowej do zależności teoretycznej (określonej zależnością 3). Na tej podstawie obliczyć można prędkość przepływu płynu. W celu sprawdzenia rozwiązania numerycznego podano na Rys. 5 wykres przedstawiający obliczone wartości prędkości. Z analizy wykresów wynika, że otrzymano dobrą zgodność wyników numerycznych. Błąd względny znajduje się na poziomie poniżej 1% i rośnie wraz ze wzrostem  $u$ . Wynika to z błędów rozwiązywania członu konwekcyjnego w równaniu transportu ciepła. Błąd ten w ogólności rośnie wraz ze wzrostem prędkości medium, dla ilorazu centralnego różnicowego (Patankar, 1980).



Rys. 4. Przesunięcie fazowe fali pomiędzy detektorami w zależności od częstotliwości źródła fali (a) oraz błąd względny obliczeń numerycznych (b)



Rys. 5. Zależność między prędkością zadaną w obliczeniach numerycznych do wyznaczonej na podstawie analitycznej krzywej opisującej przesunięcie fazowe fali

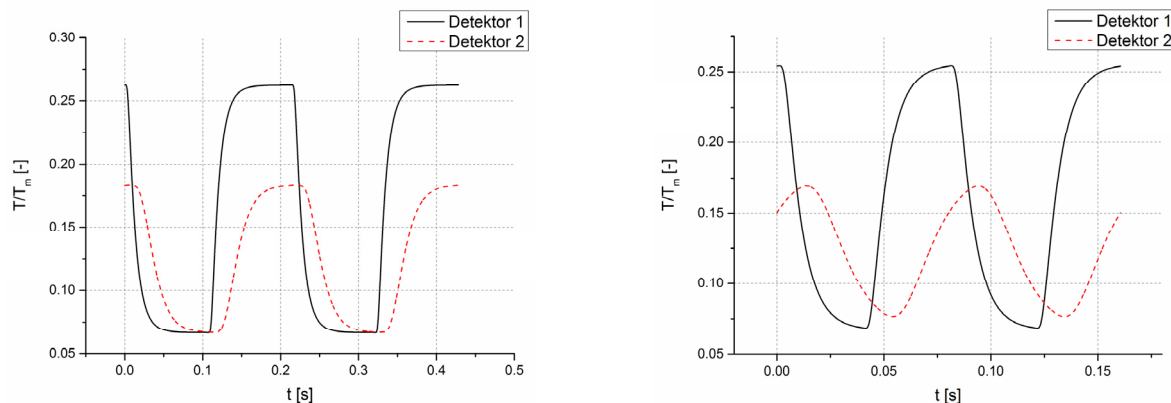
#### 4. Porównanie obliczeń numerycznych z wynikami badań eksperymentalnych

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych propagacji fali cieplnej w powietrzu. Pomiary zrealizowano w tunelu aerodynamicznym, w powietrzu o temperaturze pokojowej. Nadajnik fali oraz dwa detektory wykonano z drutu wolframowego. Umieszczono je w pionowo w jednej płaszczyźnie. Odległość między detektorami pracujących w układzie termometru rezystancyjnego, wynosiła 2 mm. Parametry charakteryzujące falę, czyli jej kształt, amplituda, częstotliwość, ilość okresów zadawane były programowo i realizowane przez termooanemometr CCC'2002 (Ligęza, 2000). Sygnały napięciowe z detektorów były przesyłane za pośrednictwem kart przetworników A/C do komputera, a następnie poddawane obróbce cyfrowej. Generowano fale sinusoidalne i prostokątne w zakresie

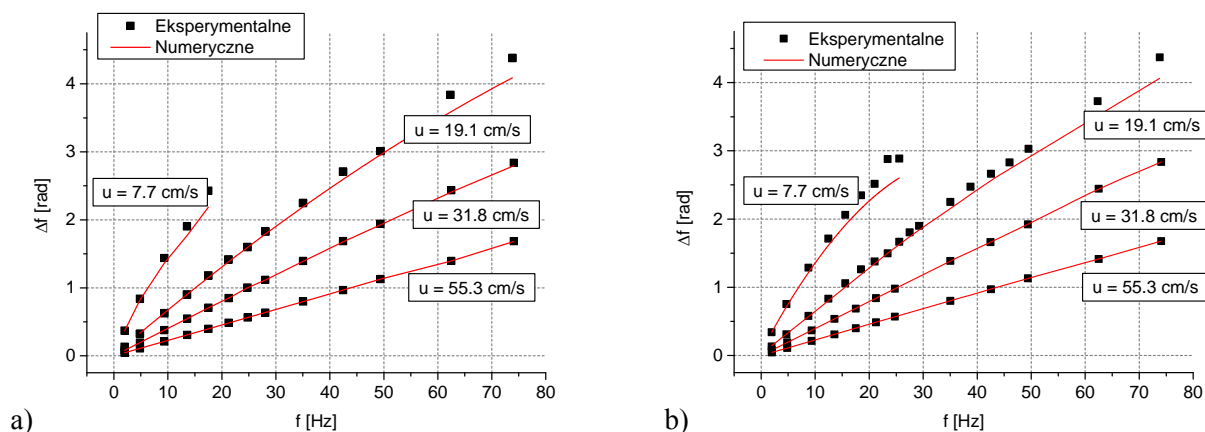
częstotliwości od 5 do 75 Hz. Badania przeprowadzono dla prędkości od 7 cm/s do 55 cm/s. Wyniki eksperymentów porównano z rozwiązaniem numerycznym.

Na Rys. 6. przedstawiono przykładowe wartości znormalizowanej temperatury zarejestrowanej na detektorach w czasie dla dwóch wybranych okresów (wynik symulacji numerycznej) dla wybranych wartości prędkości i częstotliwości fali prostokątnej.

Na Rys. 7 przedstawiono porównanie przesunięcia fazowego fali sinusoidalnej (a) oraz prostokątnej (b) otrzymanego na drodze doświadczalnej z wynikami symulacji numerycznej w zależności od prędkości przepływu i częstotliwości źródła.



Rys. 6. Przebieg temperatury na detektorach dla: (a)  $u = 7.7$  cm/s,  $f = 4.67$  Hz oraz (b)  $u = 9.1$  cm/s,  $f = 13.51$  Hz



Rys. 7. (a) Przesunięcie fazowe fali sinusoidalnej pomiędzy detektorami; (b) Przesunięcie fazowe pierwszej harmonicznej fali prostokątnej

## 5. Wnioski

Celem pracy było opracowanie prostego narzędzia do rozwiązywania problemu propagacji fali ciepłej w poruszającym się płynie, w oparciu o metody numeryczne dla przypadku dwuwymiarowego. Otrzymano wartości przesunięcia fazy amplitudy fali ciepłej zarejestrowanych na dwóch detektorach, przy prostopadłej orientacji liniowego źródła fali względem wektora prędkości przepływu. Wyniki obliczeń porównano z rozwiązaniem analitycznym. Otrzymano dobrą zgodność obu metod. Narzędzie umożliwia analizę wymuszenia o charakterze prostokątnym, dla którego brak jest rozwiązania teoretycznego. Należy zaznaczyć, że rozwiązując równanie transportu ciepła wprowadzono założenia upraszczające. Zaniedbano bowiem zmianę własności termofizycznych płynu ze zmianą temperatury oraz założono, że prędkość za źródłem pozostaje niezaburzona. Ponadto, trzeba zwrócić uwagę na rozdzielczość przestrzenną siatki dyskretyzacyjnej. Zastosowana siatka prostokątna uniemożliwia wyznaczenie dokładnego rozkładu pola temperatury w pobliżu włókna nadajnika, o średnicy ok. 8  $\mu\text{m}$ . Winno to być przedmiotem dalszych analiz.

Praca została wykonana w roku 2014 w ramach prac statutowych realizowanych w IMG PAN w Krakowie, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

## Literatura

- Kielbasa J., 1975: *Fale cieplne w metrologii powolnych przepływów*. Wyd. AGH, Kraków.
- Kielbasa J., 2005: *Pomiar prędkości przepływu ustalonego metodą fal cieplnych*. Arch. Min. Sci., Vol. 50, No 2, p. 191-208.
- Ligeza P., 2000: *Four-point non-bridge constant-temperature anemometer circuit*. Exp. Fluids, Vol. 29, No 5, p. 505-507.
- Patankar S., 1980: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC Press.
- Rachalski A., 2013: *Absolute Measurements of Very Low Gas Flow Velocity by Means of Spectral Analysis of Thermal Wave*. Rev. Sci. Instrum., Vol. 84, No 2/2013, 025105.
- Wiśniewski S., Wiśniewski T., 2000: *Wymiana ciepła*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

### Numerical verification of the model of thermal wave propagation in a flowing gas

#### Abstract

Thermal waves can be used for absolute measuring of very small velocity of fluid. This paper presents a numerical solution of the model of thermal wave propagation in the air using finite difference method. Two-dimensional temperature distribution in the wake of linear source of sinusoidal and rectangular wave was computed. Phase shift of wave's amplitude between two detectors was determined. Source was localized perpendicular to the velocity vector. The results from numerical investigation was compared with analytical solution and the experimental data.

**Keywords:** thermal waves, flow velocity measurements, non-stationary heat transport equation