Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN
Tom 16, nr 1-2, czerwiec 2014, s. 37-48

Rozkład temperatury wokół odcinkowego nadajnika ciepła

Marek Gawor

Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

Streszczenie

W artykule przedstawiono zastosowanie fal temperaturowych generowanych w płynącym gazie do pomiaru jego prędkości. Zasada pomiaru prędkości przepływu gazu, oparta na tej metodzie polega na pomiarze czasu przelotu sygnału cieplnego na znanej drodze. Podano ogólną teorię rozkładu temperatury wokół periodycznego źródła ciepła. Przeanalizowano rozkłady temperatury wokół źródła punktowego, liniowego nieskończonego i odcinkowego. Podano porównanie otrzymanych wyników rozkładów temperatury. W szczególności podano analizę rozkładu fazy i amplitudy w przypadku nadajnika punktowego, nieskończonego i odcinkowego. Przedstawiono możliwości zastosowania rozkładu temperatury do pomiaru prędkości gazu.

Słowa kluczowe: fale temperaturowe, termoanemometria, wymiana ciepła

1. Wstęp

Zastosowanie fal temperaturowych generowanych w płynącym gazie do pomiaru jego prędkości zostało zapoczątkowane w roku 1948, kiedy to w Johne Hopikns University Kovaszanay badał opływ cylindra. Od kilkunastu lat metoda fal temperaturowych stanowi także główny przedmiot badań w Pracowni Metrologii Przepływu Instytutu Mechaniki Górotworu Polskiej Akademii Nauk w Krakowie.

Zasada działania przyrządów służących do pomiaru prędkości przepływu gazów, oparta jest na pomiarze czasu przelotu sygnału cieplnego unoszonego przez gaz (Kiełbasa, 1975a, 2005). Początkowo zostały zbudowane anemometry z unoszonym sygnałem cieplnym (Kiełbasa, 1975b), później anemometr oscylacyjny (Kiełbasa, 1968) i ostatnio anemometr oscylacyjny dwukierunkowy (Kiełbasa i in., 1972). Działanie tych anemometrów opierało się na założeniu, że czas przelotu sygnału cieplnego na zadanej drodze jest równy czasowi przelotu płynącego gazu na tej drodze. Po szczegółowych badaniach okazało się, że w zakresie małych prędkości założenie równoczesności przelotu gazu i sygnału temperaturowego jest nieprawdziwe; czas przelotu sygnału cieplnego jest krótszy niż czas przelotu gazu. Przyczyną tego zjawiska okazało się przewodnictwo temperaturowe gazu (Rachalski, 2006).

Pierwsze próby oceny wpływu przewodnictwa temperaturowego gazu na czas przelotu sygnału cieplnego przedstawione w pracy (Kiełbasa i in., 1971) wykazały, że średnia prędkość fazowa $\overline{v}_T$ rozprzestrzeniającej się w płynącym gazie fali temperaturowej jest funkcją: prędkości gazu v, częstotliwości fali temperaturowej ω oraz przewodnictwa temperaturowego gazu κ.

W tej sytuacji został opracowany przez J. Kiełbasę teoretyczny rozkład temperatury wokół periodycznego źródła opływanego przez gaz. Udało się uzyskać w dokładny sposób rozkład temperatury jaki daje liniowe, punktowe i płaskie źródło opływane przez medium.

W typowych anemometrach z rozchodzącym się sygnałem cieplnym, nadajnikiem sygnału (źródłem fali cieplnej) jest drut o średnicy 3-10 mm i długości 4-40 mm lub układ drutów umieszczonych w płaszczyźnie prostopadłej do przepływu. Należy zatem znaleźć teoretyczny rozkład temperatur pochodzący od takiego odcinkowego źródła.

Praca niniejsza podaje teoretyczny rozkład temperatury pochodzący od odcinkowego, periodycznego źródła ciepła. Podano również dla porównania zestawienie amplitudy i fazy rozkładów temperatury pochodzące od źródła liniowego, punktowego i odcinkowego.

Na zakończenie przedstawiono sposób pomiaru prędkości gazu poprzez pomiar amplitudy lub fazy rozkładu temperaturowego. W oparciu o uzyskane rezultaty omówiono jakie warunki powinny być zachowane podczas eksperymentu (pomiaru), aby rozkład temperatury pochodzący od źródła odcinkowego można było uważać za taki sam jak od źródła liniowego oraz aby następował liniowy wzrost fazy wraz z odległością.

2. Rozkład temperatury wokół opływanego periodycznego źródła ciepła

Przez pomiar amplitudy lub fazy w rozkładzie temperatury wokół periodycznego w czasie źródła ciepła możemy wyznaczyć średnią lub lokalną prędkość fali temperaturowej. Ponieważ, jak wspomniano we wstępie, prędkość fali temperaturowej jest większa od prędkości gazu, aby więc wyznaczyć prędkość medium należy znaleźć związek pomiędzy tymi wielkościami.

2.1. Ogólna teoria rozkładu temperatur

Przy teoretycznych rozważaniach dotyczących uzyskania zależności pomiędzy fazą lub amplitudą rozkładu temperaturowego, a prędkością medium istotne znaczenie ma wymiar źródła (N). Celem tego rozdziału jest przeanalizowanie rozkładów temperaturowych dla źródła punktowego (N = 3), liniowego (N = 2) i płaskiego (N = 1).

Jeżeli założymy, że temperatura gazu wokół źródła jest na tyle niska, że nie zmienia fizycznych właściwości gazu, a w szczególności współczynnik przewodnictwa temperaturowego κ jest stały, to rozkład temperatury $T(x_1 ... x_N, t)$ jest rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego z konwekcją v i źródłem o wydajności $q(t)$. Jeżeli założymy dalej, że kierunek prędkości przepływu gazu jest zgodny z kierunkiem osi x_1, to równanie to przyjmuje postać:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_N^2} \right) - v \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{q(t)}{\rho c} \tag{1}$$

gdzie:

T – temperatura
$x_1 ... x_N$ – współrzędne kartezjańskie punktu,
t – czas,
v – prędkość gazu,
ρ – gęstość medium,
c – ciepło właściwe medium przy stałym ciśnieniu,
$q(t)$ – natężenie źródła ciepła,
κ – współczynnik przewodnictwa temperaturowego.

Zadajemy warunek początkowy w postaci:

$$T(x_1 \ldots x_N, 0) = 0 \tag{2}$$

Ograniczone w nieskończoności rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy (2) dane jest całką:

$$T(x_1 \ldots x_N, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)}{\left(2\sqrt{\pi\kappa(t-\tau)}\right)^N} e^{-\frac{[x_1-\zeta_1-v(t-\tau)]^2+\ldots+[x_N-\zeta_N]^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\zeta_1 \ldots d\zeta_N \tag{3}$$

gdzie: $T(x_1 ... x_N, t)$ – temperatura gazu w punkcie $x_1 ... x_N$ w chwili t.

Zakładamy, że periodyczne w czasie źródło ciepła (punktowe, liniowe lub płaskie) umieszczone w początku współrzędnych $x_1 ... x_N$ ma wydajność daną równaniem:

$$q(t) = Q\delta(x_1) \cdots \delta(x_N) e^{-i\omega t} \tag{4}$$

przy czym w dalszym ciągu będziemy przyjmowali:

$$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \tag{5}$$

gdzie: $\delta(x_1)\ldots\delta(x_N)$ – funkcje Dirac'a,
Q – intensywność źródła.

Wykorzystując własności funkcji Diraca możemy wykonać całkowanie po przestrzeni. Otrzymamy wtedy:

$$T\left(x_1 \ldots x_N, t\right) = \frac{Q}{\rho c\left(2\sqrt{\pi k}\right)^N} e^{\frac{vx_1}{2\kappa} - i\omega t} \int_0^t \left(\tau^{-\frac{N}{2}} e^{i\omega\tau - \frac{r^2}{4\kappa\tau} - \frac{v^2\tau}{4\kappa}} \right) d\tau \tag{6}$$

gdy $t \to \infty$ ostatecznie całka przechodzi w:

$$\int_0^\infty \left(\tau^{-\frac{N}{2}} e^{i\omega\tau - \frac{r^2}{4\kappa\tau} - \frac{v^2\tau}{4\kappa}} \right) d\tau \tag{7}$$

Dążenie z czasem do nieskończoności oznacza przeprowadzanie pomiarów po czasie dość długim, tak aby nastąpiło ustalenie rozkładu temperatur. Dokładnie mówiąc powinien być spełniony warunek $t \gg Max\left\{\frac{1}{\omega}, \frac{4\kappa}{v^2}, \frac{r^2}{4\kappa}\right\}$.

Dokonując teraz podstawień:

$$z = \frac{1}{2\kappa}\left(v^2 - i4\kappa\omega\right) \tag{8}$$

$$\alpha^2 = \frac{r^2}{v^2 - i4\kappa\omega} \tag{9}$$

otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \tau^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{z}{2}\left(\tau + \frac{\alpha^2}{\tau}\right)} d\tau = 2\alpha^{-\varepsilon} K_\varepsilon\left(\alpha z\right) \tag{10}$$

gdzie: $\varepsilon = \frac{N}{2} - 1$ – stopień funkcji Bessela,
$K_\varepsilon(\alpha z)$ – funkcja Bessela *rzędu zerowego*.

Ostateczne po podstawieniu bezwymiarowych wielkości:

$$P = \frac{4\kappa\omega}{v^2} \tag{11}$$

$$Q_r = \frac{rv}{2\kappa} \tag{12}$$

$$Q_x = \frac{x_1 v}{2\kappa} \tag{13}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + P^2}} \tag{14}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + P^2}} \tag{15}$$

Rozkład temperatury przyjmuje postać:

$$T\left(x_1 \ldots x_N, t\right) = \frac{2Q}{\rho c}\left(2\sqrt{\pi\kappa}\right)^{-N}\left(\frac{r}{v}\right)^{-\varepsilon}\left(A^2+B^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} e^{Q_x + i\left(-\omega t + \varepsilon \operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right)} K_\varepsilon\left[Q_r\left(A+iB\right)\right] \tag{16}$$

Inaczej ten rozkład temperatury można zapisać w postaci:

$$T\left(x_1 \ldots x_N, t\right) = T_0\,\theta\left(x, r\right) e^{-i\left(\omega t + \varphi(r)\right)} \tag{17}$$

gdzie:

T_0 – stała określająca źródło ciepła,
$\theta(x, r)$ – amplituda fali temperaturowej,
$\varphi(r)$ – faza fali temperaturowej.

Aby jednak dokładnie oznaczyć wielkości T_0, $\theta(x, r)$, $\varphi(r)$ należy obliczyć $K_\varepsilon[Q_r(A + iB)]$. Dla źródła liniowego obliczenie funkcji $K_0(z)$ stanowi dość poważny problem, którym zajmiemy się w dalszych rozdziałach.

2.2. Rozkład temperatury pochodzący od źródła punktowego

Obliczenie funkcję $K_\varepsilon[Q_r(A + iB)]$ jest dość łatwe dla przypadku trójwymiarowego ($N = 3$) (źródło punktowe). Wtedy $\varepsilon = 1/2$ i należy obliczyć $K_{\frac{1}{2}}\left[Q_r\left(A+iB\right)\right]$.

Korzystają tutaj ze wzoru:

$$K_{\frac{1}{2}}\left(z\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \tag{18}$$

a w naszym przypadku:

$$K_{\frac{1}{2}}\left[Q_r\left(A+iB\right)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_r^{-\frac{1}{2}}\left(A^2+B^2\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-Q_r A - i\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right) + Q_r B\right)} \tag{19}$$

i ostatecznie wzór na rozkład temperatury wokół źródła punktowego przyjmuje postać:

$$T\left(x_1 \ldots x_N, t\right) = \frac{Q}{4\rho c\kappa r\pi} e^{Q_x - Q_r A} e^{-i\left(\omega t + Q_r B\right)} \tag{20}$$

Dla tego źródła możemy oznaczyć:

$$T_0 = \frac{Q}{4\rho c\kappa r\pi} \tag{21}$$

$$\theta\left(x_1, r\right) = e^{Q_x - Q_r B} \tag{22}$$

$$\varphi(r) = Q_r B \tag{23}$$

2.3. Rozkład temperatury pochodzący od źródła liniowego (nieskończonego)

Zajmiemy się teraz rozkładem temperatury wokół liniowego nieskończenie długiego nadajnika. W tym przypadku mamy ($N = 2$), $\varepsilon = 0$. Należy obliczyć funkcję Bessela *rzędu zerowego* od argumentu zespolonego. Rozkład temperatury będzie dany wzorem:

$$T\left(x_1 \ldots x_N, t\right) = \frac{Q}{4\rho c\kappa r\pi} e^{Q_x} e^{-i(\omega t)} K_0\left[Q_r\left(A+iB\right)\right] \tag{24}$$

Zgodnie z szeregiem definiującym funkcja $K_0(z)$ dana jest wzorem (*Handbook*… 1970):

$$K_0(z) = -\left(ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right) I_0(z) + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \cdots \tag{25}$$

gdzie: $I_0(z) = 1 + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} \cdots$ -

γ – stała Eulera

Okazuje się, że przy sprawdzeniu wartości funkcji Bessela od argumentów rzeczywistych oraz wartości funkcji Kelvina (takimi tablicami dysponowałem) przy obliczeniach numerycznych szereg ten daje poprawne wartości dla małych argumentów.

Dla dużych argumentów stosowany był szereg asymptotyczny o postaci:

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{-1}{8z} + \frac{(-1)(-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(-1)(-9)(-25)}{3!(8z)^3} \cdots\right) \tag{26}$$

Sprawdzono, że dla argumentów rzeczywistych otrzymuje się zgodność z dokładnością czterech cyfr znaczących wartości $K_0(x)$ z wartościami tablicowymi (*Handbook*… 1970) korzystając z szeregu definicyjnego jeśli $x < 3.5$. Natomiast jeśli $x >= 3.5$ poprawne wartości $K_0(x)$ daje szereg asymptotyczny. Dla argumentu zespolonego obliczenia prowadzono według szeregu definicyjnego jeżeli $|z| < 3.5$, a według asymptotycznego jeśli $|z| \geq 3.5$. W ten sposób obliczone wartości dla funkcji Bessela dały zgodność z wartościami tablicowymi z dokładnością czterech cyfr znaczących.

Jeżeli zagwarantujemy spełnienie warunku:

$$\left|\frac{1}{8z}\right| \ll 1 \tag{27}$$

to dla funkcji Bessela rzędu zerowego mamy taką samą formę rozwinięcia jak dla funkcji Bessela rzędu połówkowego

$$K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \tag{28}$$

i wtedy dla rozkładu temperatury pochodzącego od źródła liniowego otrzymamy:

$$T_0 = \frac{Q\sqrt{\pi}}{\rho c\sqrt{8}} \tag{29}$$

$$\theta(x_1, r) = \frac{e^{-Q_x - AQ_r}}{\sqrt{Q_r}\sqrt[8]{1 + P^2}} \tag{30}$$

$$\varphi(r) = BQ_r + \frac{1}{4}\text{arctg}(P) \tag{31}$$

Ze wzoru (31) widać, że przepływ dwuwymiarowy charakteryzuje szczególna własność – skok fazy ψ równy:

$$\psi = \frac{1}{4}\ \text{arctg}(P) \tag{32}$$

zależny jedynie od wielkości P. Wokół źródła punktowego (jak wynika ze wzoru (23) nie ma takiego skoku fazy.

Dalsza analiza rozkładu temperaturowego źródła punktowego i liniowego zostanie przeprowadzona w rozdziale 3.

2.4. Rozkład temperatury wokół nadajnika o długości 2h

W badaniach eksperymentalnych jako nadajnika używa się włókna (drutu) o skończonej długości. Zajmiemy się teraz teoretycznym przeanalizowaniem rozkładu temperatury pochodzącego od nadajnika o skończonej długości.

Układ współrzędnych dobieramy tak, aby nadajnik o długości $2h$ umieszczony był wzdłuż osi z i jego środek znajdował się w początku układu. Zakładamy dalej, że wydajność źródła dana jest wzorem:

$$q(t)=\bar{Q}\delta(x)\ \delta(y)e^{-i\omega t} \tag{33}$$

Stała $\bar{Q}$ dla źródła liniowego ma sens mocy wydzielanej na jednostkę długości nadajnika (wymiar $\bar{Q}$ [J/s m], natomiast dla źródła punktowego $\bar{Q}$ ma sens całkowitej mocy wydzielanej przez źródło (wymiar $\bar{Q}$ [J/s]). Całkowita moc wydzielona przez nadajnik odcinkowy o długości $2h$ wynosi:

$$Q_c=2h\bar{Q} \tag{34}$$

Podzielmy długość odcinka $2h$ na n części i jednocześnie całkowitą moc wydzielaną przez nadajnik podzielmy na tą samą ilość części. Każda część podziału będzie miała długość:

$$\Delta u=\frac{2h}{n} \tag{35}$$

na każdym z tych odcinków będzie wydzielana moc:

$$\frac{2h\bar{Q}}{n}=\bar{Q}\Delta u \tag{36}$$

Jeżeli $n\to\infty$, to każdą z części na które podzieliliśmy nadajnik możemy traktować jako źródło punktowe wydzielające moc:

$$Q=\bar{Q}du \tag{37}$$

Obliczmy teraz rozkład temperatury pochodzący od punktowego źródła ciepła o intensywności (37) umieszczonego w punkcie $(0,0,u)$ układu współrzędnych. Zgodnie ze wzorem (4) wydajność źródła będzie dana poprzez:

$$q(t)=Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-u)e^{-i\omega t}=\bar{Q}du\delta(x)\delta(y)\delta(z-u)e^{-i\omega t} \tag{38}$$

Rozkład temperatury od tego punktowego źródła zgodnie z (3) będzie przedstawiony przez całkę:

$$T(x,y,z,t)=\int_0^t d\tau\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{e^{-it\omega}\bar{Q}\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\zeta-u)}{\rho c\left(2\sqrt{\pi\kappa(t-\tau)}\right)^3}e^{-\frac{[x-\xi-v(t-\tau)]^2+[y-\eta]^2+[z-\zeta]^2}{4\kappa(t-\tau)}}d\xi d\eta d\zeta \tag{39}$$

przyjęto: $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$

Całki po przestrzeni możemy wyliczyć i otrzymamy wyrażenie:

$$T(x,y,z,t)=\frac{Q}{\left(2\sqrt{\pi\kappa}\right)^3}\int_0^t\frac{e^{-i\omega\tau}}{\rho c\left(\sqrt{t-\tau}\right)^3}e^{-\frac{r^2+u^2-2zu}{4\kappa(t-\tau)}+\frac{xv}{2\kappa}-\frac{v^2(t-\tau)}{4\kappa}}d\tau \tag{40}$$

które w końcu można sprowadzić do postaci:

$$T(x,y,z,t)=\frac{Q}{\rho c\left(2\sqrt{\pi\kappa}\right)^3}e^{-i\omega t+\frac{xv}{2\kappa}}\int_0^t\tau^{-\frac{3}{2}}e^{i\omega\tau-\frac{r^2+u^2-2zu}{4\kappa\tau}-\frac{v^2\tau}{4\kappa}}d\tau \tag{41}$$

gdy $t \to \infty$ ostatnia całka przechodzi w

$$\int_0^\infty \tau^{-\frac{3}{2}} e^{i\omega\tau - \frac{r^2+u^2-2zu}{4\kappa\tau} - \frac{v^2\tau}{4\kappa}} d\tau \tag{42}$$

Postępując analogicznie jak dla rozpatrywanego już ogólnego przypadku rozkładu temperatury wprowadzamy wielkości:

$$z = \frac{1}{2\kappa}\left(v^2 - 4i\kappa\omega\right) \tag{43}$$

$$\alpha^2 = \frac{r^2 + u^2 - 2zu}{v^2 - 4i\kappa\omega} \tag{44}$$

otrzymamy:

$$\int_0^\infty \eta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{z}{2}\left(\eta + \frac{\alpha^2}{\eta}\right)} d\eta = 2\alpha^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}\left(z\alpha\right) \tag{45}$$

Z zależności (43) i (44) możemy wyznaczyć:

$$\alpha = \frac{r}{v}\sqrt{1 + \frac{u^2 - 2uz}{r^2}}\left(A^2 + B^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\,\mathrm{arctg}\frac{B}{A}} \tag{46}$$

$$\alpha z = \frac{r\,v}{2\kappa}\sqrt{1 + \frac{u^2 - 2\,z\,u}{r^2}}\left(A + iB\right) = Q_{ru}\left(A + iB\right) \tag{47}$$

gdzie:

$$Q_{ru} = \frac{r\,v}{2\kappa}\sqrt{1 + \frac{u^2 + 2u\,z}{r^2}}$$

W ten sposób dochodzimy do rozkładu temperatury pochodzącego od punktowego źródła umieszczonego w punkcie $(0, 0, u)$ układu współrzędnych

$$T\left(x, y, z, t\right) = \frac{2Q}{\rho c\left(2\sqrt{\pi\kappa}\right)^3} e^{Q_x} Q_{ru}^{-\frac{1}{2}}\left(A^2 + B^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\left(\omega t - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right)} K_{\frac{1}{2}}\left[Q_{ru}\left(A + iB\right)\right] \tag{48}$$

Aby otrzymać rozkład temperatury od odcinkowego nadajnika należy wysumować rozkłady temperatur pochodzące od punktowych źródeł umieszczonych na odcinku od $-h$ do $+h$. Ponieważ źródeł tych jest nieskończona ilość, a każdemu z nich został przypisany element *du* długości nadajnika sumowanie należy zastąpić całkowaniem po elementach *du* długości źródła odcinkowego.

Ostatecznie rozkład temperatury od liniowego nadajnika o skończonej długości przybiera postać:

$$T\left(x, y, z, t\right) = \frac{2\bar{Q}}{\rho c\left(2\sqrt{\pi\kappa}\right)^3} e^{Q_x}\left(A^2 + B^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2\kappa}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\left(\omega t - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right)} \int_{-h}^{h} Q_{ru}^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}\left[Q_{ru}\left(A + iB\right)\right] du \tag{49}$$

Jeżeli skorzystamy teraz ze wzoru (18) to otrzymamy:

$$T\left(x, y, z, t\right) = \frac{\bar{Q}v}{8\rho c\pi\kappa^2} e^{Q_x - i\omega t} \int_{-h}^{h} Q_{ru}^{-1} e^{-Q_{ru}A - iQ_{ru}B} du \tag{50}$$

Dalsze obliczenia prowadzone były w sposób numeryczny, a wyniki obliczeń podano rozdziale 3.

Sprawdźmy jeszcze co dzieje się z rozkładem temperatury pochodzącym od źródła odcinkowego gdy $h \to 0$. Powinniśmy otrzymać rozkład temperatury taki sam jak od źródła punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych, przy czym całkowita moc źródła odcinkowego i punktowego powinna być taka sama.

Na rozkład temperatury dla źródła odcinkowego otrzymaliśmy wyrażenie

$$T(x,y,z,t) = C\bar{Q}\int_{-h}^{h} f(u)\,du \tag{51}$$

gdzie:

$$C = \frac{v}{8\rho c\pi\kappa^2} e^{Q_x - i\omega t}$$

$$f(u) = Q_{ru}^{-1} e^{-AQ_{ru} - iBQ_{ru}}$$

Korzystając ze wzoru (34)

$$\bar{Q}_c = \bar{Q}\,2h \tag{52}$$

gdzie $\bar{Q}_c$ – całkowita moc wydzielona przez odcinkowy nadajnik, możemy rozkład ten zapisać w postaci:

$$T(x,y,z,t) = C\frac{\bar{Q}_c}{2h}\int_{-h}^{h} f(u\,du) \tag{53}$$

Weźmy teraz granicę z tego wyrażenia przy $h \to 0$

$$T_p(x,y,z,t) = C\lim_{h\to 0}\frac{\bar{Q}_c}{2h}\int_{-h}^{h} f(u)\,du \tag{54}$$

Przez T_p oznaczono rozkład temperatury pochodzący od punktowego źródła umieszczonego w początku układu współrzędnych. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całki otrzymamy:

$$T_p(x,y,z,t) = C\lim_{h\to 0}\frac{\bar{Q}_c}{2h}\,2h\,f(\zeta) \tag{55}$$

gdzie: ζ – dowolny punkt leżący w przedziale od $-h$ do h.

Jeżeli przyjmiemy $\zeta = 0$ to:

$$T_p(x,y,z,t) = C\bar{Q}_c f(0) = \frac{\bar{Q}_c}{4c\pi\kappa\rho r} e^{Q_x - Q_r A} e^{-i(\omega t + BQ_r)} \tag{56}$$

Otrzymaliśmy wzór identyczny ze wzorem (20) otrzymanym poprzednio dla rozkładu temperatury pochodzącego od źródła punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych.

3. Analiza i porównanie otrzymanych rozkładów temperatur

W poprzednich rozdziałach otrzymaliśmy wzory podające rozkłady temperatury wokół punktowego, liniowego i odcinkowego źródła ciepła (20), (24), (50). Ze względu na skomplikowaną formę wzorów porównanie rozkładów temperatur między sobą jest trudne. Dla dokładnego obliczenia amplitudy i fazy w rozkładzie temperatury pochodzących od źródła liniowego, nieskończenie długiego należy obliczyć funkcję $K_0(z)$. Przy ustalonych parametrach przepływu funkcja $K_0(z)$ staje się funkcją odległości r od źródła (argumentem funkcji K_0 jest $z = Q_rA + iQ_r B$). W celu obliczenia tej funkcji został napisany specjalny program.

Aby otrzymać rozkład temperatury pochodzący od źródła odcinkowego należy przeprowadzić całkowanie funkcji określonej wzorem (50). Ponieważ funkcji tej nie udało się scałkować analitycznie, całkowanie wykonano w sposób numeryczny Obliczenia rozkładów temperatur prowadzono przy następujących parametrach charakteryzujących przepływ: v = 50 cm/s, κ = 0.22 cm^2/sek, ω = 40 Hz. Dla tych parametrów bezwymiarowe wielkości określone wzorami (11), (14), (15) przyjmują następujące wartości: $P = 0.1441$, $A = 1.00003$, $B = 0.00704$.

3.1. Analiza zależności fazy w rozkładzie temperatury od odległości od źródła

3.1.1. Nadajnik punktowy

Jak wynika ze wzoru (23) dla źródła punktowego faza wraz ze wzrostem odległości narasta liniowo. Dla tego przypadku nie obserwujemy skoku fazy w pobliżu źródła (dla $r = 0$ mamy $\psi = 0$). Podczas obliczeń numerycznych przyjęto wartości stałej charakteryzującej nadajnik i medium $\frac{\bar{Q}}{\rho c} = 1$ m^3/Ks. Ponieważ stała $\bar{Q}_c$ jest mocą wydzielaną przez nadajnik, a ρ – gęstością medium i c – ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu to dla konkretnego eksperymentu możemy obliczyć wartość wielkości $\frac{\bar{Q}}{\rho c}$.

3.1.2. Nadajnik liniowy

Dla źródła liniowego przy spełnieniu warunku (27) mamy również liniowe narastanie fazy wraz ze wzrostem odległości (wzór 31). Jednak w tym przypadku dla odległości $r = 0$ $\psi = 1/4 \operatorname{arctg}(P)$. Występuje tutaj w pobliżu źródła, sygnalizowany już w rozdziale pierwszym, skok fazy. Dla zadanych wartości parametrów przepływu możemy wyliczyć ten skok fazy. Jeżeli weźmiemy wartości parametrów przepływu określone w (51) to obliczone ze wzoru (31) skok fazy $\psi = 0.003$ radiany.

Po obliczeniu funkcji $K_0(z)$ okazuje się, że w pobliżu źródła poczynając od pewnej odległości r_p obserwujemy nieliniowy spadek fazy do zera. Możemy oszacować wartość skoku fazy. Po uwzględnieniu liniowego narastania fazy odczytujemy wartość $\psi = 0.003$ radiany.

Wyznaczmy teraz odległość od źródła, przy której można było stosować przybliżenie (27) na funkcję Bessela zgodnie z warunkiem (28). Załóżmy, że opuszczamy dalsze wyrazy szeregu (26) jeżeli są one mniejsze od jedynki więcej niż l razy. Z warunku (27) wyznaczymy odległość, dla której pierwszy wyraz szeregu (26) jest mniejszy od jedynki l razy. W związku z tym, że szereg ten jest szeregiem malejącym dalsze wyrazy szeregu możemy pominąć. Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$r \approx \frac{\kappa}{4v\sqrt[4]{1+P^2}}\, l \tag{57}$$

Jeżeli podstawimy wartości parametrów przepływu takie jak wyżej oraz przyjmiemy $l = 10^{-2}$ m otrzymamy $r_p = 0.1$ cm.

Obliczenia numeryczne fazy prowadzono w ten sposób, że liczono fazę zmieniając odległość od źródła o stałą wartość. W tej sytuacji, jeżeli różnica fazy $\Delta\varphi$ między dwoma kolejnymi krokami obliczeń jest stała możemy wnioskować, że faza narasta liniowo. W tabeli 1 mamy podane wartości $\Delta\phi$ uzyskane podczas obliczeń. Z tabeli widać, że faza zaczyna narastać liniowo począwszy od odległości $r_p = 0.08$ cm. Wartość ta dość dobrze zgadza się z poprzednio oszacowaną wartością odległości od źródła, przy której powinno nastąpić liniowe narastanie fazy.

Tabela 1

Odległość od źródła [cm]	Źródło punktowe [K]	Źródło liniowe [K]	Źródło odcinkowe [K]	Źródło punktowe [radiany]	Źródło liniowe [radiany]	Źródło odcinkowe [radiany]	Różnica Fazy [radiany]
1	2	3	4	5	6	7	8
0.01	36.1705	0.7833	0.7017	0.0072	0.011	0.012	0.0182
0.02	18.0847	0.5741	0.5225	0.0154	0.0192	0.0204	0.0149
0.04	9.0478	0.4147	0.4146	0.0312	0.0354	0.0342	0.0163
0.06	6.0275	0.3412	0.3412	0.0478	0.0515	0.0514	0.0161
0.08	4.5204	0.2967	0.2967	0.0631	0.0675	0.0672	0.0159
0.1	3.6161	0.266	0.266	0.0795	0.0835	0.0835	0.016
0.2	1.8075	0.189	0.189	0.1597	0.1635	0.1635	0.0159

1	2	3	4	5	6	7	8
0.4	0.9032	0.1339	0.1339	0.3195	0.3235	0.3235	0.0159
0.6	0.6018	0.1094	0.1094	0.4798	0.4835	0.4835	0.0159
0.8	0.4511	0.0947	0.0947	0.6391	0.6435	0.6435	0.0159
1	0.3606	0.0847	0.0847	0.7993	0.8034	0.8034	0.0159
2	0.1599	0.0597	0.0597	1.5994	1.6034	1.6034	0.0159
4	0.0899	0.042	0.042	3.1996	3.2034	3.2034	0.0159
6	0.0594	0.0341	0.0341	4.7992	4.8034	4.8034	0.0159
8	0.0446	0.0293	0.0293	6.3991	6.4033	6.4033	0.0159
10	0.0351	0.0261	0.0261	7.9993	8.0033	8.0033	0.0159

3.1.3. Nadajnik odcinkowy

Przy obliczeniach rozkładu temperatur dla źródła odcinkowego wartości parametrów przepływu były takie same jak dla źródła nieskończonego. Długość nadajnika wynosiła 1 cm. Zależność amplitudy i fazy od odległości dla tego źródła przedstawiono w tabeli 1. Z tabeli widać, że amplituda i faza rozkładu temperatury pochodzącego od tego źródła i źródła liniowego nieskończonego pokrywają się począwszy od pewnej odległości $r_s = 0.1$ cm. Oznacza to, że począwszy od tej odległości źródło odcinkowe o długości 1 cm daje taki sam rozkład temperatury jak źródło liniowe.

Ponieważ fazy rozkładów temperatury pochodzące od źródła liniowego nieskończonego i źródła odcinkowego pokrywają się począwszy od odległości r_s, a liniowe narastanie fazy wraz ze wzrostem odległości zgodnie ze wzorem (31) następuje od odległości r_p, to dla odległości większej od:

$$r_M = \mathrm{Max}\left\{r_s \ , r_p\right\} \tag{58}$$

możemy przyjąć, że faza dla źródła odcinkowego zmienia się wraz ze zmianą odległości w sposób liniowy.

Obliczenia fazy prowadzone były w ten sposób, że zmieniano odległość od źródła posuwając się po osi x układu współrzędnych. Oś x układu współrzędnych stanowi oś symetrii rozkładu temperatury dla źródła odcinkowego. O ile na osi tej mamy dobrą zgodność rozkładów temperatur (dla źródła liniowego i odcinkowego) to poza tą osią rozkłady temperatury mogą się znacznie różnic.

4. Zastosowanie rozkładu temperatur do pomiaru prędkości

Skoro wiemy już jakie warunki powinny być spełnione, aby faza w rozkładzie temperatury, który pochodzi od źródła odcinkowego narastała liniowo możemy podać metody pozwalające wyznaczyć prędkość medium. Prędkość gazu możemy wyznaczyć dokonując pomiaru amplitudy lub fazy.

4.1. Wyznaczanie prędkości gazu poprzez pomiar fazy

Istnieją dwie metody pozwalające wyznaczyć prędkość gazu, gdy znamy fazę w rozkładzie temperatury:

I. metoda pomiaru całkowitej fazy φ,
II. metoda pomiaru przyrostu fazy $\Delta\varphi$.

Dla pewnej odległości r_0 większej od r_M całkowita faz wynosi φ_0. Posługując się metodą pomiaru całkowitej fazy z eksperymentu możemy wyznaczyć tylko prędkość fali temperaturowej. Z teorii fal wiemy, że zachodzi związek:

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{r}{\overline{v_T}} \tag{59}$$

gdzie:

Δt – czas przelotu fali temperaturowej na drodze r,
$\overline{v_T}$ – średnia prędkość fali temperaturowej na tej drodze.

Porównując wzór (31) z równaniem (54) dostajemy:

$$\varphi_0 = \frac{\omega r_0}{\bar{v}_T} = \frac{v r_0}{2\kappa\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{16\kappa^2\omega^2}{v^4}}} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\kappa\omega}{v^2}\right) \tag{60}$$

Dla małych wartości liczby P (duże v) uzyskujemy z równania (60) przybliżoną zależność następującej formie:

$$\frac{v}{\bar{v}_T} - 1 \approx \frac{\kappa}{r_0\, v} \tag{61}$$

Rozwiązując przybliżone równanie (61) ze względu na prędkość medium dostajemy:

$$v \approx \frac{\omega r_0}{\varphi_0}\left(1+\frac{\kappa\varphi_0}{\omega r_0^2}\right) \tag{62}$$

Równanie (62) podaje nam związek pomiędzy prędkością v medium, fazą całkowitą φ_0 rozkładu temperaturowego w punkcie r_0.

Inną mamy sytuację, gdy pomiaru prędkości medium dokonujemy metodą różnicową tzn. mierzymy fazę raz dla odległości r i drugi raz dal odległości $r + \Delta r$. Biorąc różnicę tych pomiarów dostaniemy $\Delta\varphi$. Ze wzoru (31) mamy:

$$\Delta\varphi = -B\,Q_r = \frac{v\,r}{2\kappa\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+P^2}} \tag{63}$$

Wprowadzając pojęcie lokalnej prędkości fali temperaturowej jako:

$$v_T = \frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\,\omega \tag{64}$$

Zależność (63) przyjmuje postać

$$\frac{\omega}{v_T} = \frac{v}{2\kappa\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+P^2}} \tag{65}$$

Wzór (65) można przekształcić do postaci:

$$v = v_T\sqrt{1-\frac{4\kappa^2\omega^2}{v_T^4}} \tag{66}$$

Wzór (66) podaje nam związek pomiędzy prędkością v medium, a lokalną prędkością v_T fali temperaturowej, którą określiliśmy wzorem (64).

4.2. Wyznaczanie prędkości medium poprzez pomiar amplitudy

Pomiar prędkości medium możemy dokonać przez pomiar amplitudy w punktach leżących symetrycznie na osi x przed i za źródłem. Weźmy pod uwagę wzór (49) podający rozkład temperatury dla źródła odcinkowego. Ze wzoru tego otrzymamy:

$$\frac{\left|T(-x,y,z,t)\right|}{\left|T(x,y,z,t)\right|} = e^{-\frac{vx}{\kappa}} \tag{67}$$

a stąd:

$$v = \frac{\kappa}{x}\ln\frac{\left|\left(T(x,y,z,t)\right)\right|}{\left|\left(T(-x,y,z,t)\right)\right|} \tag{68}$$

Dla określonego medium jest to metoda pozwalająca w prosty i szybki sposób wyznaczyć prędkość gazu. Wymaga jednak stosowania czujnika trójdrutowego (jeden nadajnik i dwa detektory umieszczone w tej samej odległości od nadajnika, lecz po przeciwnych stronach) i dość skomplikowanej aparatury elektroniczne.

6. Uwagi końcowe

Ze względu na skomplikowaną formę wzorów analitycznych przedstawiających rozkład temperatury pochodzący od źródła odcinkowego mamy trudności z wyciągnięciem wniosków dotyczących zależności pomiędzy wielkościami charakteryzującymi przepływ (prędkość gazu, współczynnik przewodnictwa temperaturowego, częstotliwość pulsacji źródła). Po przeprowadzeniu obliczeń numerycznych udało się jedynie porównać między sobą rozkłady temperatur pochodzących od źródeł o różnej wymiarowości.

W celu porównania teoretycznego rozkładu temperatury z rozkładem otrzymanym z doświadczenia należałoby uwzględnić rozmiary detektora. Praca niniejsza daje odpowiedź na pytanie jaka jest amplituda i faza w danym punkcie przestrzeni. Nie uwzględniono faktu, że detektor (który stanowi drut o pewnej długości) obejmuje wiele punktów przestrzeni.

W celu zorientowania się o poprawności otrzymanego rozkładu temperatury należałoby porównać go z rozkładem otrzymanym z doświadczenia.

Literatura

Kiełbasa J., Rysz J., 1968: *Dual Hot-wire Anemometer with Constant Phase Shift*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., Vol. XV, Nr 8, p. 477-481.

Handbook of Mathematical Function With Formulas, Graphs and Mathematical Tables. 1970. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series – 55.

Kiełbasa J., Rysz J., Smolarski A.Z., 1971: *Temperature distribution In flowing gas due to periodical varying source of heat*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., Vol. XIX, Nr 10, p. 377-384.

Kiełbasa J., Rysz J., Smolarski A.Z., Stasicki B., 1972: *Anemometr oscylacyjny*, V Krajowa Konferencja Metrologii i Budowy Aparatury Pomiarowej, Materiały Konferencji, tom IV.

Kiełbasa J., 1975: *An absolute measurement of gas velocity by me means of an anemometer with a transported thermal Signac*, Archiwum Górnictwa, Vol. XV, Nr 4, s. 309-317.

Kiełbasa J., 1975: *Fale cieplne w metrologii powolnych przepływów*, Wyd. AGH, Kraków.

Kiełbasa J., 2005: *Pomiar prędkości przepływu ustalonego metodą fal cieplnych*, Archiwum Górnictwa, Vol. 50, nr 2, s. 191-208.

Rachalski A., 2006: *Analiza konfiguracji przestrzennej układu nadajnik detektor w anemometrze z oddziaływaniem cieplnym*. Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN. Vol. 8, No. 1-4, s. 51-58.

Temperature distribution around the segmental heat emitter

Abstract

The paper explores the applications of temperature waves generated in a flowing gas to measurements of gas flow velocity. In this method the gas flow velocity is measured based on measurements of the time it takes a thermal signal to cover a specified distance. The background theory of temperature distribution around a periodic heat sources is outlined. Temperature distributions are analysed around a point sources, linear, infinite and segmental sources. The obtained temperature distributions are compared. Of particular importance are the phase and amplitude distributions in the case of a point source or infinite and segmental emitters. Potentials of utilising temperature distributions in gas flow velocity measurements are discussed.

Keywords: temperature waves, thermal anemometry, heat transfer