

O modelu matematycznym anemometru skrzydełkowego

PAWEŁ LIGĘZA

Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

Streszczenie

Anemometry wykorzystujące zjawisko wymiany pędu pomiędzy przepływem a wirującym elementem pomiarowym stanowią ważną klasę przyrządów stosowanych w metrologii przepływów, w szczególności w pomiarach meteorologicznych oraz wentylacyjnych. W przyrządach tych występuje zjawisko zawyżania pomiaru prędkości średniej związane z inercją wirnika. Badanie tego zjawiska i dynamiki procesu pomiarowego oraz szacowanie i minimalizacja niepewności pomiaru wymagają znajomości modelu matematycznego anemometru. W pracy poddano analizie znany z literatury model anemometru skrzydełkowego bazujący na równaniu ruchu wirnika oraz zaproponowano model bazujący na bilansie mocy. Przeprowadzono badania modelowe i porównano oba modele.

Słowa kluczowe: anemometr skrzydełkowy, model matematyczny, stany dynamiczne, badania modelowe

1. Wprowadzenie

Anemometry z wirującym elementem pomiarowym (wirnikiem, rotorem, turbinką) stanowią ważną klasę przyrządów przeznaczonych do pomiaru prędkości przepływu płynów. Znajdują one wszechstronne zastosowanie w metrologii przepływów, jednak głównym obszarem aplikacyjnym są pomiary meteorologiczne oraz pomiary wentylacyjne. Ciekawą historię rozwoju konstrukcji anemometrów można prześledzić w pracy [1].

Anemometry mechaniczne z wirującym elementem pomiarowym posiadają szereg korzystnych właściwości metrologicznych. Należą do nich w przybliżeniu liniowa charakterystyka, szeroki zakres mierzonych prędkości, właściwości uśredniające wynik pomiaru oraz ograniczona wrażliwość na zmianę parametrów fizycznych gazu. Natomiast ze względu na stosunkowo duże wymiary i bezwładność elementu wirującego, pomiary w niejednorodnym polu prędkości, oraz w przepływach zmiennych w czasie wymagają złożonej interpretacji wyniku. Pomiary takie są także obciążone znaczną niepewnością. Analiza tych zjawisk możliwa jest w oparciu o model matematyczny anemometru. Opracowaniu teoretycznych modeli anemometrów z wirującym elementem pomiarowym oraz ich eksperymentalnej weryfikacji poświęcona jest obszerna literatura.

W fundamentalnej pracy [2] autor podaje równanie ruchu dla anemometru skrzydełkowego oraz zwraca uwagę na efekt zawyżania pomiaru prędkości średniej związany z inercją wirnika. Dalsze prace w tej dziedzinie [3-6] opierają się na podobnym do przyjętego w pracy [2] modelu zjawiska. Dla przyjętych założeń rozważane jest równanie ruchu wirnika, przy czym uwzględniane są momenty siły związane z wymianą pędu z przepływem oraz z tarcie. Generalnie zakładany model dynamiczny anemometru, oparty na równaniu ruchu jest w tych pracach zbliżony. Punktem wyjścia jest druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego wirnika anemometru przy uwzględnieniu sumarycznego momentu siły działającego na wirnik. Model taki zostanie poddany analizie na przykładzie uproszczonego modelu anemometru skrzydełkowego, przedstawionego w pracach [7-10]. Cechą wybranego modelu jest prosta struktura odzwierciedlająca fizyczną istotę zjawiska. Model ten opisuje dynamiczną zależność prędkości wskazywanej przez anemometr od prędkości mierzonej, przy czym zawiera on tylko jeden parametr. Parametr ten może być obliczony z bezpośrednio mierzalnych wielkości fizycznych lub wyznaczony doświadczalnie na podstawie pomiaru parametrów ruchu wirnika w przepływie. Model ten stosowany jest do analizy stanów dynamicznych anemometru, oraz szacowania i minimalizacji niepewności pomiaru.

2. Analiza modelu matematycznego anemometru skrzydełkowego bazującego na równaniu ruchu

Analizowany model przedstawiony w pracach [7-10], podobnie jak inne modele [3-6], wyprowadzony jest w oparciu o drugą zasadę dynamiki dla wirującego elementu pomiarowego. Autorzy zakładają zachowawczy charakter procesu oraz jednorodne pole prędkości mierzonej v medium o gęstości ρ . Wirnik posiada skrzydełka nachylone do przepływu pod kątem α , odległość środka aerodynamicznego skrzydełek od osi obrotu wynosi R , przekrój czynny oddziaływania przepływu z wirnikiem w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu wirnika wynosi S , moment bezwładności wirnika względem osi obrotu wynosi J , prędkość kątowa wirnika ω , a moment siły M .

Równanie ruchu wirnika ma postać:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M \quad (1)$$

Autorzy przyjmują założenie, że medium dociera do skrzydełek z prędkością v , a wymiana pędu pomiędzy przepływem a wirnikiem zachodzi tylko w kierunku obwodowym. Wtedy moment siły M związany ze zmianą pędu masy medium docierającej do wirnika w czasie dt z prędkością v wynosi:

$$M = R\rho Sv(v \operatorname{tg} \alpha - \omega R) \quad (2)$$

Dla równania wyjścia anemometru, a więc związku prędkości wskazywanej V przez anemometr z prędkością kątową ω w postaci:

$$V = \frac{\omega R}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

otrzymujemy model matematyczny I anemometru skrzydełkowego dla przyjętych założeń w postaci:

$$c_I \frac{dV}{dt} = -vV + v^2 \quad (4)$$

gdzie: $c_I = \frac{J}{\rho R^2 S}$ jest jedynym parametrem modelu i posiada wymiar długości. Zgodnie z (4) w stanie ustalonym prędkość wskazywana jest równa prędkości mierzonej.

Model (4) przedstawiony między innymi w pracach [7-10] stanowi prosty i wygodny przybliżony związek opisujący dynamikę anemometru skrzydełkowego i jest stosowany do analizy stanów dynamicznych anemometru, oraz szacowania i minimalizacji niepewności pomiaru. Posiada on jednak pewne istotne wady wynikające z przyjętych założeń.

Zgodnie z modelem (4) dla $v = 0$ prędkość wskazywana V jest stała. Tak więc przykładowo przy skoku prędkości mierzonej z pewnej niezerowej wartości do zera prędkość wskazywana nie zmienia się. Ogólnie model (4) nie opisuje poprawnie stanów dynamicznych anemometru przy zmianie prędkości mierzonej z wyższej do małej wartości. Wynika to bezpośrednio z przyjętego założenia, że medium dociera do skrzydełek z prędkością v . W rzeczywistym anemometrze wirnik posiadający moment pędu uzyskany w przepływie o wyższej wartości, po zmianie prędkości przepływu do małej wartości będzie zasysał medium zwiększając jego prędkość.

Analogicznie przy skoku prędkości mierzonej z małej do dużej wartości wirnik będzie tłumił przepływ. Uwzględnienie tych faktów wymagałoby modyfikacji równania (2) tak, aby lepiej szacować rzeczywistą masę medium docierającą do wirnika w czasie dt .

Inny problem związany jest z kątem nachylenia skrzydełek. Wielkość ta nie występuje jako parametr w modelu (4), a więc model ten nie uwzględnia wpływu kąta α na dynamikę anemometru. W rzeczywistym anemometrze zależność taka jest istotna. Ponadto w modelu (4) przyjęto bardzo uproszczoną wymianę pędu pomiędzy przepływem a wirnikiem. Ze wzrostem kąta α zwiększa się wymiana pędu w kierunku osiowym, a więc równanie (2) nie stanowi dobrego przybliżenia.

Uwzględnienie powyższych zagadnień w konstrukcji modelu w oparciu o równanie ruchu jest możliwe i stanowi przedmiot rozważań w wielu publikacjach, prowadzi jednak do znacznej komplikacji modelu

i zwiększenia ilości parametrów, z których część musi być wyznaczona eksperymentalnie. Pomimo że modele takie stanowią lepsze przybliżenie obiektu rzeczywistego, stają się jednak mniej przydatne w procesie analizy stanów dynamicznych anemometru, oraz szacowania i minimalizacji niepewności pomiaru.

Autor proponuje w dalszej części pracy alternatywny do (4) model matematyczny anemometru skrzydełkowego.

3. Model matematyczny anemometru skrzydełkowego bazujący na bilansie mocy

Autor pracy proponuje konstrukcję modelu matematycznego w oparciu o bilans mocy. Bilans ten bazuje na fakcie, że zmiana energii kinetycznej wirnika anemometru jest równa różnicy energii kinetycznej strumienia medium wpływającego i wypływającego z przekroju czynnego anemometru. W konstrukcji modelu autor przyjmuje założenie, że medium dociera do przekroju czynnego S anemometru i wypływa z niego z prędkością średnią U równą:

$$U = V = \frac{\omega R}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (5)$$

Jest to postulat odmienny do przyjętego w modelu I. Postulat ten w założeniu odzwierciedla proces pracy wirnika anemometru jako pewnego rodzaju turbiny. W przypadku gdy mierzona prędkość v jest mniejsza od V następuje zasysanie medium przez turbinę, natomiast gdy v jest większe od V następuje tłumienie przepływu. Zgodnie z tym założeniem masa medium docierająca oraz wypływająca z przekroju czynnego anemometru w czasie dt wynosi:

$$dm = \rho S V dt \quad (6)$$

Bilans mocy związany z wymianą energii kinetycznej pomiędzy przepływem a turbiną anemometru można zapisać w postaci:

$$I \omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{\rho S V v^2}{2} - \frac{\rho S V V^2}{2} \quad (7)$$

Z tego równania uwzględniając (5) otrzymujemy model matematyczny II anemometru skrzydełkowego dla przyjętych założeń w postaci:

$$c_{II} \frac{dV}{dt} = -V^2 + v^2 \quad (8)$$

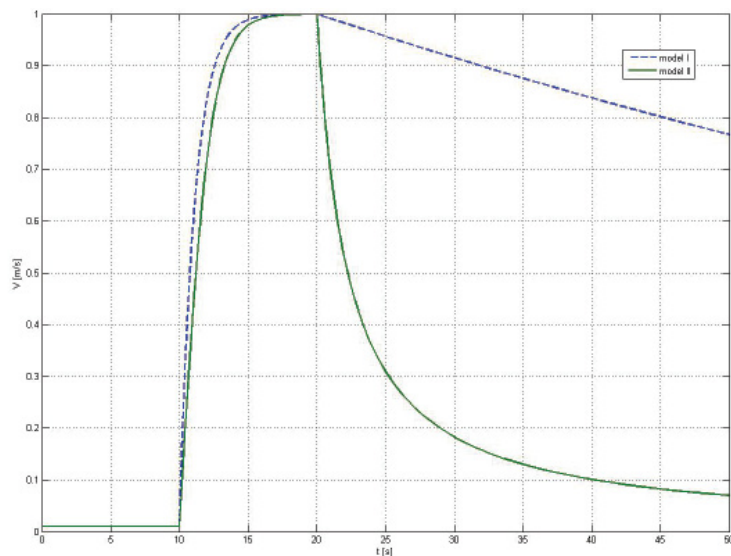
gdzie: $c_{II} = \frac{2J \operatorname{tg}^2 \alpha}{\rho R^2 S}$ jest jedynym parametrem modelu i posiada wymiar długości. Zgodnie z równaniem (8) w stanie ustalonym prędkość wskazywana jest równa prędkości mierzonej.

Struktura modeli I i II jest podobna, przy czym model I jest liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, a II nieliniowym. Modele różnią się też wartością parametru c , w parametrze c_{II} występuje kąt α . W intencji autora przedstawiony model II powinien w pewnym stopniu eliminować opisane powyżej problemy związane z modelem I. Powinien więc lepiej odzwierciedlać dynamikę anemometru przy zmianach prędkości mierzonej oraz uwzględniać wpływ kąta nachylenia skrzydełek na właściwości dynamiczne. W celu porównania obu modeli przeprowadzono badania modelowe dla wybranych wymuszeń.

4. Porównanie modeli matematycznych I i II anemometru skrzydełkowego

Wstępne porównanie właściwości modeli matematycznych I i II anemometru skrzydełkowego przeprowadzono w oparciu o badania modelowe. Przyjęto parametry fizyczne rzeczywistego anemometru zawarte w pracy [10]. W pracy tej w tablicy 1 zestawiono parametry modelu, przy czym stała c jest bezwymiarowa,

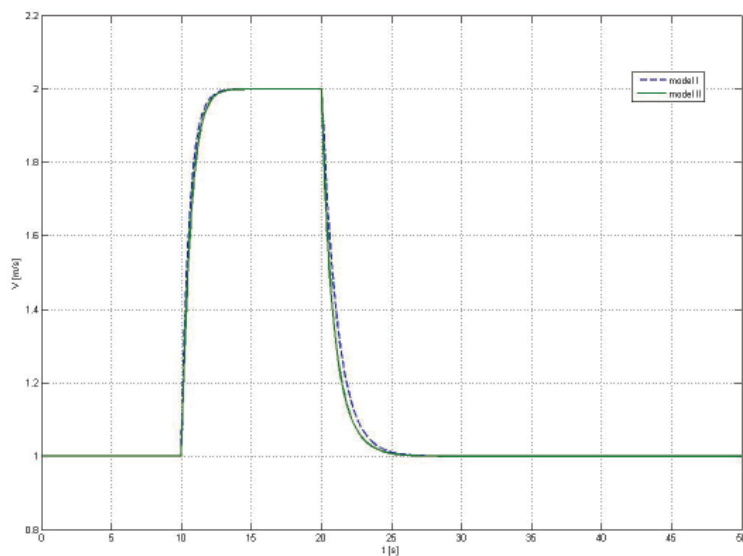
w rzeczywistości powinna mieć wymiar długości. Dla tych parametru wyznaczono rozwiązania modeli I i II dla wybranych wymuszeń. Na rys. 1 przedstawiono przebiegi rozwiązań dla skokowego wzrostu prędkości mierzonej od 0,01 m/s do 1 m/s oraz spadku do 0,01 m/s, przy kącie nachylenia skrzydełek $\alpha = 45^\circ$.



Rys. 1. Odpowiedź modelu I i II na skokową zmianę prędkości 0,01 m/s do 1 m/s, $\alpha = 45^\circ$

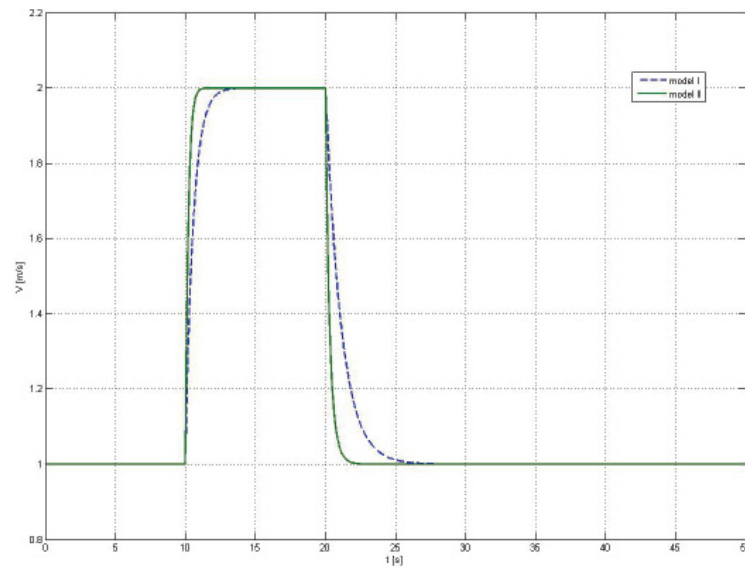
Czas narastania odpowiedzi dla obu modeli jest zbliżony, natomiast widoczny jest bardzo długi czas opadania odpowiedzi modelu I. Przy prędkości dążącej do 0 m/s czas ten dąży do nieskończoności, co stanowi istotny mankament modelu I. Dla modelu II czas opadania ma jest rzędu dziesiątek sekund, co odzwierciedla rzeczywisty proces.

Na rys. 2. przedstawiono przebiegi rozwiązań dla skokowego wzrostu prędkości mierzonej od 1 m/s do 2 m/s oraz spadku do 1 m/s, również przy kącie nachylenia skrzydełek $\alpha = 45^\circ$.



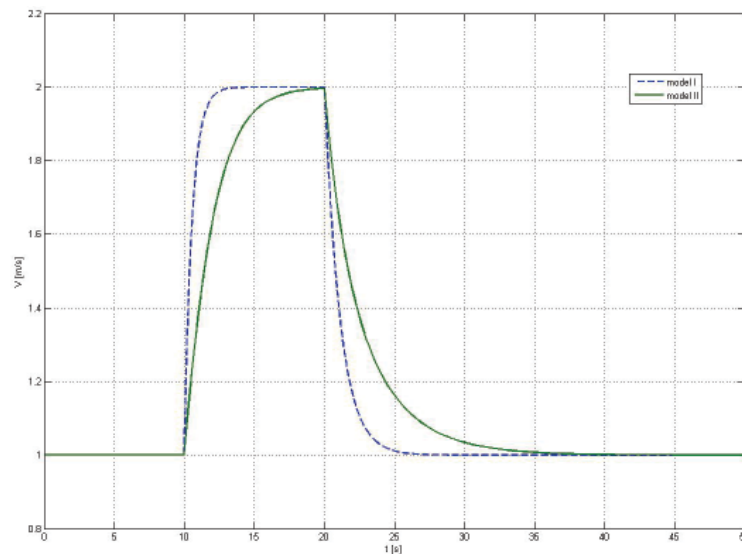
Rys. 2. Odpowiedź modelu I i II na skokową zmianę prędkości 1 m/s do 2 m/s, $\alpha = 45^\circ$

W tym przypadku odpowiedzi obu modeli są bardzo zbliżone, model I cechuje się nieznacznie szybszym narastaniem i wolniejszym opadaniem przebiegu. Odpowiedź dla tego samego wymuszenia przy kącie nachylenia skrzydełek $\alpha = 30^\circ$ przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Odpowiedź modelu I i II na skokową zmianę prędkości 1 m/s do 2 m/s, $\alpha = 30^\circ$

Dla tego przypadku zgodnie z przewidywaniem odpowiedź modelu I nie zmieniła się, natomiast czas narastania i opadania odpowiedzi modelu II jest zdecydowanie krótszy. Na rys. 4. przedstawiono odpowiedź dla tego samego wymuszenia przy kącie nachylenia skrzydełek $\alpha = 60^\circ$.



Rys. 4. Odpowiedź modelu I i II na skokową zmianę prędkości 1 m/s do 2 m/s, $\alpha = 60^\circ$

Również dla tego przypadku zgodnie z przewidywaniem odpowiedź modelu I nie zmieniła się, natomiast czas narastania i opadania odpowiedzi modelu II jest ulega wydłużeniu. Model II jest więc wrażliwy na zmianę kąta nachylenia skrzydełek co odzwierciedla rzeczywiste zjawisko fizyczne.

5. Podsumowanie

W pracy poddano teoretycznej analizie znany z literatury model I anemometru skrzydełkowego bazujący na równaniu ruchu wirnika oraz zaproponowano alternatywny model II bazujący na bilansie mocy. Przy konstrukcji modeli przyjęto nieco odmienne założenia. Oba modele mogą być stosowane do analizy stanów dynamicznych anemometru, oraz szacowania i minimalizacji niepewności pomiaru, w szczególności związanej z efektem zawyżania pomiaru prędkości średniej w przepływach zmiennych w czasie. W zakresie większych prędkości, przy kącie nachylenia skrzydełek $\alpha = 45^\circ$, dynamika obu modeli jest zbliżona.

Natomiast dla bardzo małych prędkości oraz dla różnych kątów α model II wydaje się być bliższy rzeczywistego procesu. Jednak dokładne porównanie obu modeli wymaga przeprowadzenia weryfikacji doświadczalnej.

Praca została wykonana w ramach prac statutowych 2015/2016 realizowanych w IMG PAN w Krakowie, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] Unwin I.D., Phil M.: *The Measurement of Air Flow in British Coal Mines: A Historical Review*. B. SC. D.I.S, http://www.cmhrc.co.uk/cms/document/air_flow_2007.pdf, (2007).
- [2] Ower E.: *On the response of a vane anemometer to an air-stream of pulsating speed*. Phil. Mag. Series 7 23, 157, 992-1005 (1937).
- [3] Lee W.F.Z., Kirik M.J., Bonner J.A.: *Gas Turbine Flowmeter Measurement of Pulsating Flow*; J. Eng. Power 97,4, 531-539 (1975).
- [4] Wyngaard J.C.: *Cup, Propeller, Vane, and Sonic Anemometers in Turbulence Research*. Annual Review of Fluid Mechanics, 13, 399-423 (1981)
- [5] Lee B., Cheesewright R., Clark C.: *The dynamic response of small turbine flowmeters in liquid flows*. Flow Measurement and Instrumentation 15, 239-248, (2004)
- [6] Pindado S., Sanz A., Wery A.: *Deviation of Cup and Propeller Anemometer Calibration Results with Air Density*. Energies, 5(3), 683-701, (2012).
- [7] Lee B.: *Dynamic Response of Small Turbine Flowmeters in Pulsating Liquid Flows*. Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy, Department of Systems Engineering Brunel University, (2002).
- [8] Krach A., Krawczyk J., Kruczkowski J., Pałka T.: *Zmienność pola prędkości i strumienia objętości powietrza w wyrobiskach kopalń głębinowych*. Archives of Mining Sciences, Monograph 1, Kraków, (2006).
- [9] Kruczkowski J., Krach A., Krawczyk J.: *Badania czujników anemometrycznych wykorzystywanych w metodach pomiaru pola prędkości i strumienia objętości – wyznaczanie źródeł błędów, analiza niepewności*. Prace Instytutu Mechaniki Górniczej PAN, 10, 1-4, 115-130, (2008).
- [10] Ostrogórski P.: *Właściwości dynamiczne cyfrowego anemometru skrzydełkowego*. Przegląd Górniczy, 71, 4, 67-71, (2015).

On vane anemometer mathematical model

Abstract

Anemometers using the phenomenon of transfer of momentum between the gas flow and the rotating measuring element are an important class of instruments used in the metrology of flows, in particular in meteorology and ventilation measurements. The phenomenon of over-estimation of the average velocity measurements associated with the inertia of the rotor is known. The research of this phenomenon and of the dynamics of measurement process, as well as the estimation of measurement uncertainty and its reduction needs a mathematical model of the anemometer. This study analyzed a model known in the literature based on the equation of motion and proposes a model based on the balance of power. Model tests were performed and both models were compared.

Keywords: vane anemometer, mathematical model, dynamic states, model tests