

Numeryczne wyznaczanie pola temperatury i weryfikacja eksperymentalna w zastosowaniu do anemometru z falą cieplną

MACIEJ BUJALSKI, DOMINIK KĘSEK, JAN KIELBASA, ANDRZEJ RACHALSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie numeryczne równania propagacji fal cieplnych w płynącym gazie. Analizowano równanie liniowe oraz nieliniowe, z zależną od temperatury dyfuzyjnością temperaturową gazu. Wyniki obliczeń porównano z danymi pomiaru pól temperatury w płynącym powietrzu. Zaobserwowano wpływ nieliniowości na wartości przesunięcia fazowego fali cieplnej dla prędkości przepływu poniżej 20 cm/s.

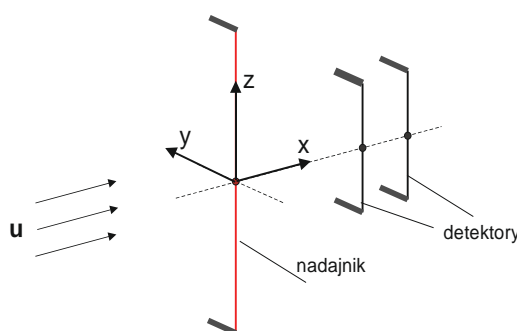
Słowa kluczowe: fale cieplne, pomiar prędkości przepływu, zjawiska nieliniowe

1. Wstęp

Metoda fal cieplnych, w różnych jej odmianach, jest szeroko stosowana do pomiaru bardzo małych prędkości przepływu. Pomiar prędkości przepływu tą techniką polega na generacji w badanym przepływie fali cieplnej o zadanych parametrach, i pomiarze temperatury płynącego gazu w określonych punktach. Miarą prędkości przepływu jest czas, w jakim fala temperaturowa przebywa określoną drogę wzdłuż kierunku wektora prędkości. W oparciu o zjawisko fal cieplnych badane i konstruowane są przepływomierze cieczy i gazów [1-7], zwłaszcza do pomiarów mikro- i nanoprzepływów. Generalnie, wszystkie przepływomierze wymagają wzorcowania, gdyż brakuje wystarczająco dokładnego analitycznego rozwiązania modelu zjawiska. Próby modelowania czujników ograniczają się do badania konkretnych rozwiązań przepływomierzy w określonej geometrii przepływu i układu przestrzennego nadajnika fali oraz detektorów oraz rodzaju generowanego sygnału (sinusoidalny, prostokątny etc.). Zwykle też analiza dotyczy określonego rodzaju gazu lub cieczy, których przepływ ma być mierzony.

Aby mierzyć prędkość przepływu metodą fal cieplnych w sposób absolutny niezbędne jest rozwiązanie analityczne równania propagacji fal cieplnych. Kielbasa przestawił rozwiązanie równania tego równania dla

fali sinusoidalnej w obszarze nieskończonym [8, 9], co pozwoliło na określenie warunków absolutnego pomiaru prędkości przepływu gazu w skali makro. W zakresie małych prędkości (dla powietrza poniżej 30 cm/s), wskutek wpływu dyfuzji temperaturowej na prędkość rozchodzenia się fali, aby wyznaczyć prędkość w sposób absolutny należało zastosować sygnał złożony i skorzystać z zależności przesunięcia fazowego fali od częstotliwości. Ponieważ dyfuzyjność temperaturowa zależy od temperatury gazu należałoby sprawdzić, czy model liniowy, w którym zakłada się, że dyfuzyjność temperaturowa gazu pozostaje stała jest wystarczająco dokładny w zakresie bardzo małych prędkości przepływu.



Rys. 1. Konfiguracja przestrzenna nadajnika i detektorów w przepływie

2. Podstawy teoretyczne

Zjawisko propagacji fal cieplnych w płynącym gazie opisuje równanie zachowania energii, które w tym przypadku przyjmuje postać niestacjonarnego równania adwekcji-konwekcji:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{div}(\lambda(T)\mathbf{grad}T) - \rho(T)c(T)\mathbf{U}\mathbf{grad}T + Q \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{U} – wektor prędkości gazu, T – temperatura gazu, λ – przewodnictwo cieplne gazu, c – ciepło właściwe gazu, ρ – gęstość gazu, Q – gęstość mocy źródła. Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{div}(\kappa(T)\mathbf{grad}T) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial \lambda}{\partial T} (\mathbf{grad}T)^2 - \mathbf{U}\mathbf{grad}T + \frac{Q}{\rho c} \quad (2)$$

gdzie $\kappa(T)$ jest dyfuzyjnością temperaturową. Wartość współczynnika przy kwadracie gradientu jest dla powietrza prawie dwa rzędy mniejsza niż wartość dyfuzyjności temperaturowej [11]. Z kolei dyfuzyjność temperaturowa powietrza z dobrym przybliżeniem zależy liniowo od temperatury [11]. Pomijając wyraz z kwadratem gradientu temperatury oraz zakładając, że dyfuzyjność temperaturowa zależy liniowo od temperatury: $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 T$ dostajemy dla przypadku dwuwymiarowego równanie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \kappa_1 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right] - U \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{Q}{\rho c} \quad (3)$$

Jeżeli pominiemy zależność dyfuzyjności temperaturowej od temperatury, to równanie (3) upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - U \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{Q}{\rho c} \quad (4)$$

Dla liniowego, nieskończonego źródła fali o sinusoidalnie zmiennej w czasie temperaturze w układzie jak na rys. 1, Kielbasa [8] przedstawił rozwiązanie analityczne równania (4), z którego otrzymał przesunięcie fazowe fali temperaturowej pomiędzy dwoma detektorami na drodze Δx w postaci:

$$\Delta\varphi = \frac{u\Delta x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{16\kappa^2\omega^2}{u^4}} - 1 \right)} \quad (5)$$

gdzie: ω – częstość fali cieplnej.

Gdy $\frac{16\kappa\omega}{u^2} \ll 1$ otrzymujemy zależność (6), łączącą przesunięcie fazy fali, częstość źródła, odległość między detektorami i prędkość fazową fali:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega\Delta x}{u} \quad (6)$$

Z tego równania wyznaczyć można prędkość przepływu gazu przy założeniu, że prędkości gazu jest równa prędkości fali cieplnej. W tym przypadku wpływ dyfuzji temperaturowej na propagację fali cieplnej jest pomijalnie mały; fala rozchodzi się z prędkością unoszenia U . Jeżeli powyższa nierówność nie jest spełniona, to dyfuzji temperaturowej nie można pominąć. Prędkość przepływu gazu można wyznaczyć w sposób absolutny na podstawie zależności (5), mierząc przesunięcie fazowe dla różnych częstotliwości fali, a następnie dopasowując dane pomiarowe do zależności teoretycznej metodą estymacji nieliniowej [10].

3. Zastosowana metoda numeryczna

Równania różniczkowe (3) i (4) rozwiązywano metodą różnic skończonych. Obszar rozwiązania zdyskretyzowano równomierną siatką węzłów i zastąpiono pochodne odpowiednimi ilorazami różnicowymi, zgodnie z równaniem (7) i (8) odpowiednio.

$$\frac{T_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta x} = \left[\frac{\kappa_{i-1,j} (T_{i,j}^k - T_{i-2,j}^k)}{2\Delta x} - \frac{\kappa_{i+1,j} (T_{i+2,j}^k - T_{i,j}^k)}{2\Delta x} \right] \frac{1}{2\Delta x} + \left[\frac{\kappa_{i,j-1} (T_{i,j}^k - T_{i,j-2}^k)}{2\Delta y} - \frac{\kappa_{i,j+1} (T_{i,j+2}^k - T_{i,j}^k)}{2\Delta y} \right] \frac{1}{2\Delta y} \quad (7)$$

$$\frac{T_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta x} = \kappa \left(\frac{T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k - 2T_{i,j}^k}{\Delta x} + \frac{T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k - 2T_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \quad (8)$$

gdzie: i, j – numer węzła w kierunku odpowiednio osi x oraz y , k – poziom czasowy, Δx – krok przestrzenny, Δt – krok czasowy.

W tej zależności występuje tylko jedna niewiadoma $T_{i,j}^{k+1}$, którą można określić znając temperatury w węzłach sąsiednich w poprzednim przedziale czasu. Metoda ta, określana schematem różnicowym jawnym (Eulera) [12] jest warunkowo stabilna. Wprowadzając do rozważań bezwymiarowe parametry – siatkową liczbę Fouriera τ (zależność 9) oraz liczbę Couranta ν (zależność 10) otrzymać można warunek na stabilność rozwiązania w kolejnych krokach czasowych. Dla przypadku dwuwymiarowego liczba Fouriera nie powinna być większa od 0.25. Ponadto, w przypadku istnienia członu konwekcyjnego w równaniu transportu ciepła spełniony musi być warunek CFL (Warunek Couranta–Friedrichsa–Lewy’ego) – liczba ν powinna być mniejsza bądź równa 1 [12]:

$$\tau = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (9)$$

$$\nu = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (10)$$

Równania (7) i (8) rozwiązywano dla prędkości przepływu u w zakresie 10-50 cm/s, przyjmując dla dyfuzyjności temperaturowej powietrza $\kappa_0 = 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$ i $\kappa_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/(\text{s} \cdot \text{K})$. Jako warunek początkowy przyjęto, że temperatura w całym analizowanym obszarze jest równa temperaturze otoczenia $T_o = 20^\circ\text{C}$. Na brzegach dwuwymiarowego obszaru (płaszczyzna $x - y$ na rys. 1) o wymiarach $40 \times 10 \text{ mm}$ założono, że temperatura pozostaje niezmienna w czasie i jest równa temperaturze T_o . Na źródle fali cieplnej (węzeł siatki zlokalizowany w miejscu nadajnika) założono następujące warunki brzegowe: sinusoidalny przebieg temperatury w czasie (zależność 11), oraz prostokątny (12).

$$T(x=0, y=0, t) = \frac{T_m - T_o}{2} \left(1 + \sin \left(2\pi ft - \frac{\pi}{2} \right) \right) + T_o \quad (11)$$

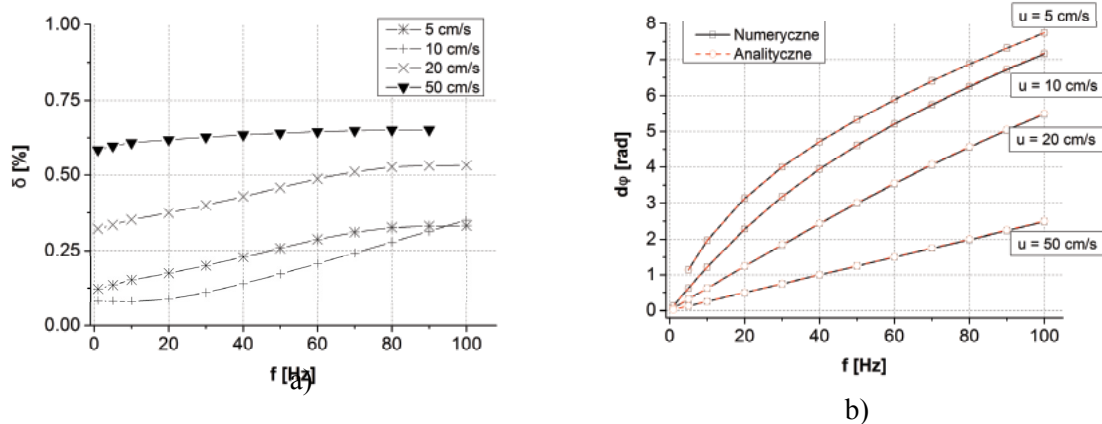
$$T(x=0, y=0, t) = \frac{T_m - T_o}{2} \left(1 + \text{sgn} \left(\sin \left(2\pi ft \right) \right) \right) + T_o \quad (12)$$

$T_m = 300^\circ\text{C}$ – maksymalna temperatura na nadajniku.

4. Wyniki obliczeń numerycznych

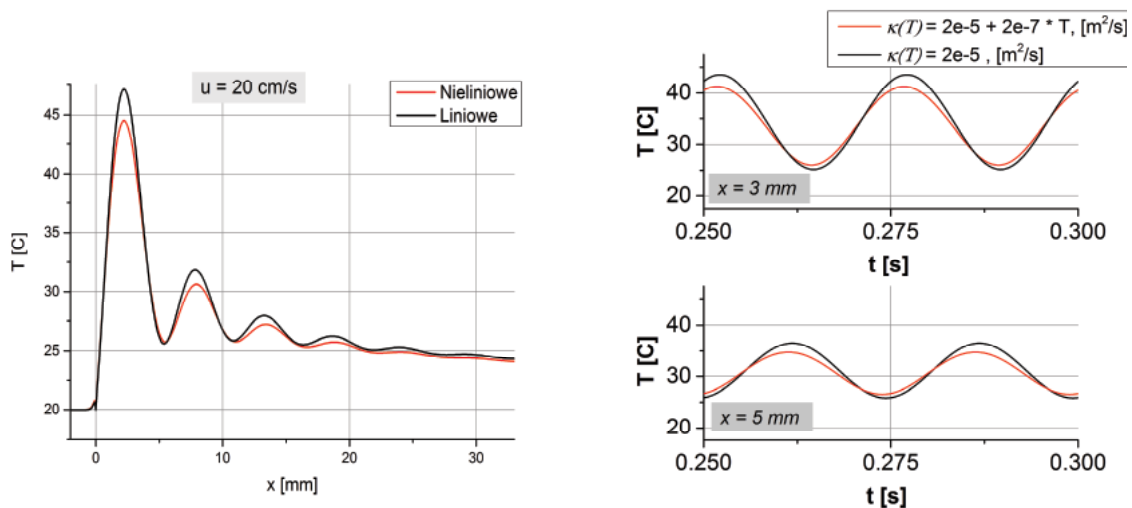
W celu sprawdzenia poprawności zastosowanej metody numerycznej porównano wyniki obliczeń z rozwiązaniem analitycznym modelu liniowego. W obliczeniach przyjęto, że detektor pierwszy znajduje się w odległości 3 mm, a detektor drugi w odległości 5 mm za źródłem fali cieplnej (rys. 1). W punktach tych rejestrowano wartości temperatury w kolejnych krokach czasowych. Otrzymane sygnały poddano analizie spektralnej, stosując algorytm szybkiej transformaty FFT. Na tej podstawie obliczono przesunięcie fazowe fali pomiędzy dwoma detektorami.

Wyniki, dla kilku wybranych wartości prędkości przepływu, przedstawiono na rys. 2. Błąd względny obliczeń numerycznych w odniesieniu do rozwiązania analitycznego wynosi poniżej 1% i rośnie wraz ze wzrostem prędkości. Wynika to z błędów rozwiązywania członu konwekcyjnego w równaniu transportu



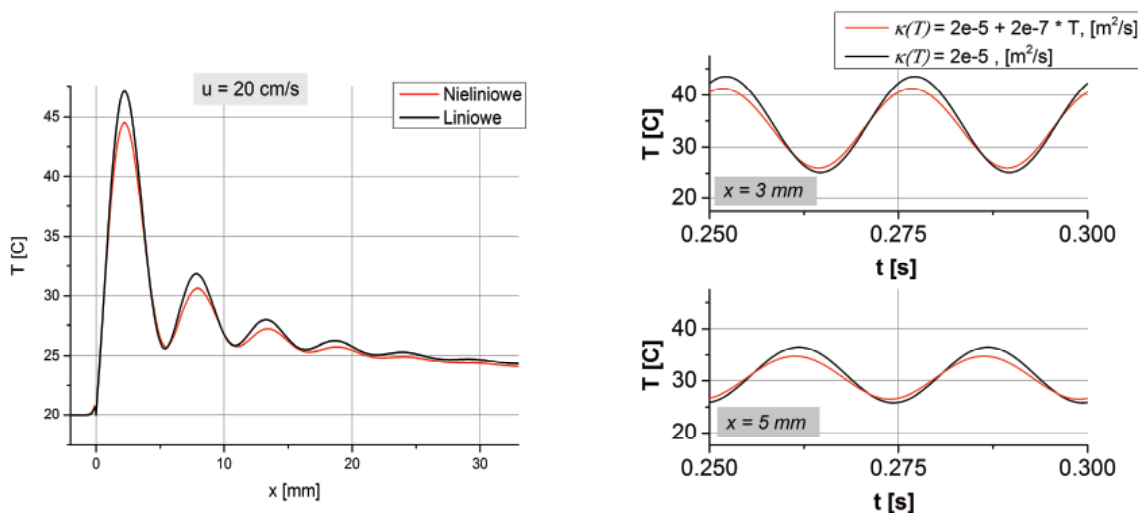
Rys. 2. Przesunięcie fazowe fali pomiędzy detektorami w zależności od częstotliwości źródła fali (a) oraz błąd względny obliczeń numerycznych (b)

ciepła, z zastosowaniem centralnego ilorazu różnicowego [12]. Rysunek 3 przedstawia wyliczone chwilowe pole temperatury dla prędkości 5 i 20 cm/s. Dla mniejszej prędkości, widoczne jest silne rozmycie fali, spowodowane dyfuzją temperatury. Na rys. 4 przedstawiono chwilowy profil podłużny względem kierunku prędkości (dla $y = 0$), znormalizowanej temperatury względem wartości T_m po czasie odpowiadającym 10 okresom wymuszenia sinusoidalnego o częstotliwości $f = 40$ Hz przy prędkości przepływu $u = 20$ cm/s. Przedstawiono również przebiegi temperatury w czasie w punktach o współrzędnych $y = 0$ i $x = 3$ oraz

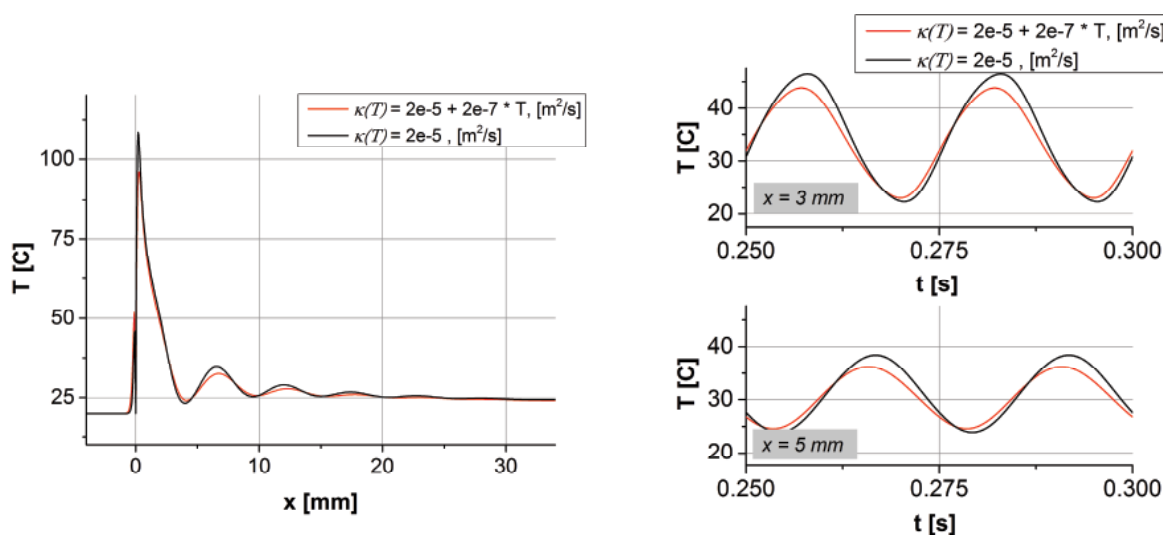


Rys. 3. Obliczone numerycznie chwilowe pole temperatury dla prędkości przepływu 5 cm/s i 20 cm/s

5 mm. Jak widać, już przy tej wartości prędkości przepływu zaznacza się wpływ nieliniowości na przebieg temperatury. Należy zwrócić uwagę na widoczny po lewej stronie profilu temperatury mały pik przedstawiający falę biegnącą w kierunku przeciwnym do kierunku prędkości przepływu. Analogiczne wykresy dla fali prostokątnej przedstawiono na rys. 5. Rysunek 6 przedstawia rozkład sygnału temperaturowego na składowe harmoniczne. W przypadku rozwiązania równania nieliniowego dla fali sinusoidalnej pojawiają się dodatkowe składowe harmoniczne wyższych rzędów. Dla fali prostokątnej obserwujemy pojawienie się kolejnych parzystych składowych harmonicznych.

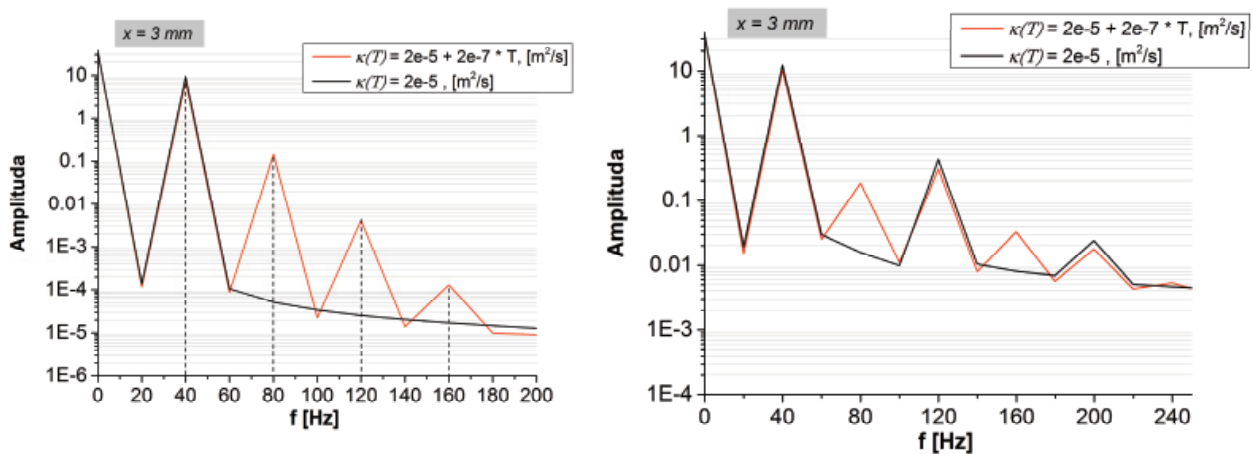


Rys. 4. Porównanie chwilowego profilu podłużnego temperatury dla rozwiązania numerycznego równania liniowego i nieliniowego przy wymuszeniu sinusoidalnym na źródle fali oraz przebiegi temperatury w czasie w wybranych punktach

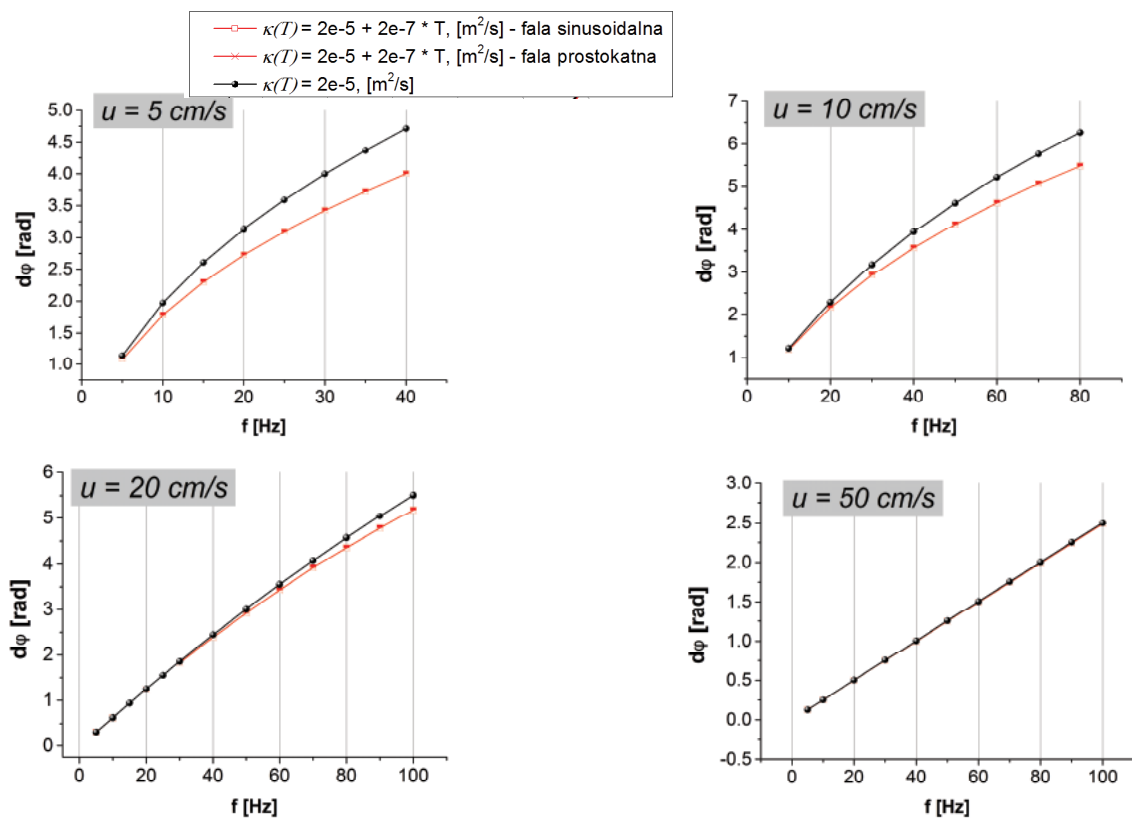


Rys. 5. Porównanie chwilowego profilu podłużnego temperatury dla rozwiązania numerycznego równania liniowego i nieliniowego przy wymuszeniu prostokątnym na źródle fali oraz przebiegi temperatury w czasie w wybranych punktach

Ponieważ do wyznaczenia prędkości przepływu wykorzystujemy równanie (5) interesujące było zbadanie jak nieliniowość wpływa na zależność przesunięcia fazowego fali od częstotliwości. Wyniki przedstawia rys. 7, jak widać nieliniowość powoduje zwiększenie prędkości fali temperaturowej, co zaznacza się wyraźnie dla małych prędkości przepływu. Efekt ten rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości fali. Dla prędkości 50 cm/s nie widać różnicy pomiędzy modelem liniowym a nieliniowym, co jest zgodne z faktem, że przy tej prędkości przepływu fala cieplna rozchodzi się z prędkością gazu, i dyfuzja cieplna jest do pominięcia. Zwraca uwagę, że przesunięcia fazowe pierwszej harmonicznej fali sinusoidalnej i pro-

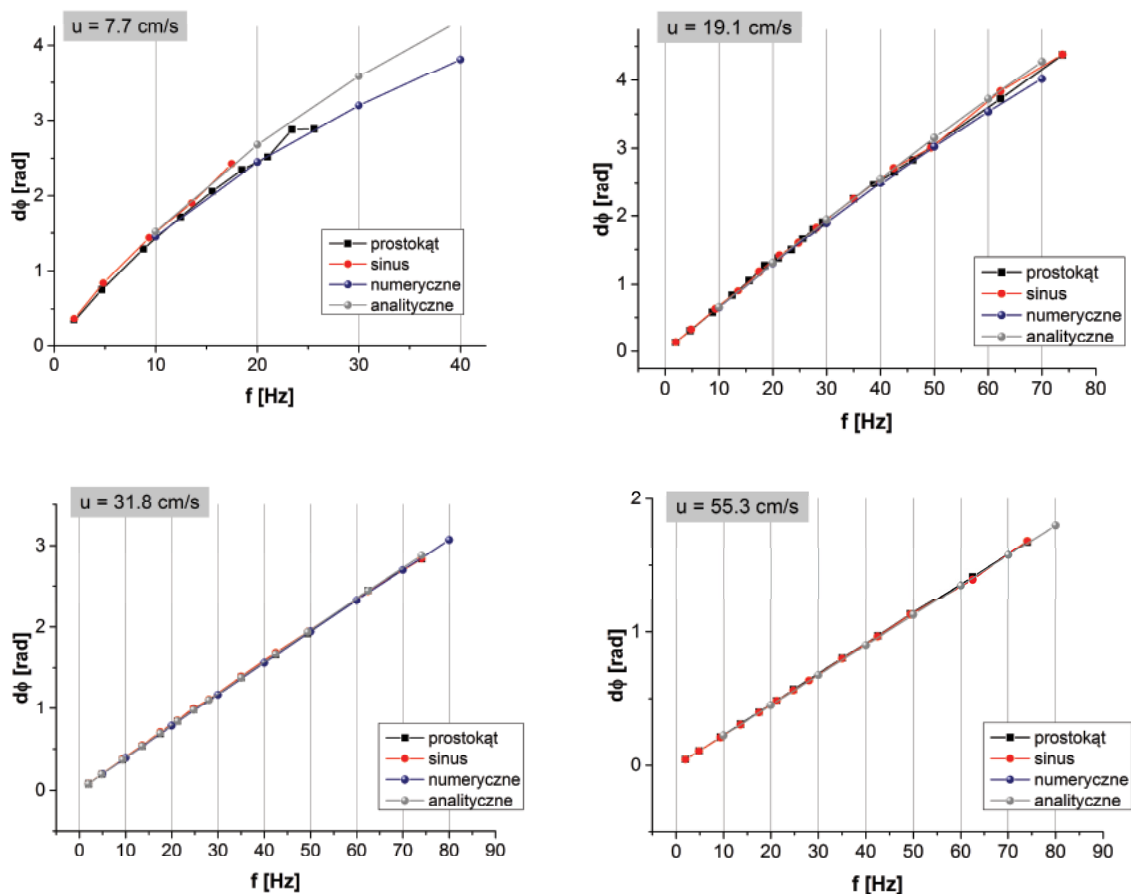


Rys. 6. Analiza widmowa sygnału dla fali sinusoidalnej i prostokątnej



Rys. 7. Porównanie zależności przesunięcia fazowego fali temperaturowej od częstotliwości w dwóch punktach dla numerycznego rozwiązania równania liniowego i nieliniowego

stokątnej są sobie równe. Na rys. 8 porównano obliczone zależności przesunięcia fazowego fali cieplnej od częstotliwości z wynikami pomiarów dla fali sinusoidalnej oraz prostokątnej. Dla prędkości przepływu 7 cm/s potwierdzają się przewidywania otrzymane drogą analizy numerycznej (rys.7). W przypadku pozostałych wykresów trudno jednoznacznie stwierdzić, że model nieliniowy jest bardziej zgodny z wynikami pomiarów niż model liniowy.



Rys. 8. Porównanie obliczonych zależności przesunięcia fazowego fali temperaturowej od częstotliwości z wynikami pomiarów

5. Wnioski

Zastosowanie prostego narzędzia numerycznego pozwoliło na wykrycie efektu nieliniowego w propagacji fal temperaturowych w płynącym gazie. Jak się okazało zależność współczynnika dyfuzyjności termicznej od temperatury wpływa na prędkość fali temperaturowej w zakresie bardzo małych prędkości przepływu i należy ją uwzględnić przy pomiarach bardzo małych prędkości. Wpływ nieliniowości rośnie ze wzrostem częstotliwości fali temperaturowej. Zależność przesunięcia fazowego fali sinusoidalnej i prostokątnej jest identyczna, pomimo występowania nieliniowości. Dalsze badania polegać będą na dokładniejszej weryfikacji eksperymentalnej modelu nieliniowego. W obliczeniach numerycznych planuje się zastosowanie bardziej zaawansowanych metod obliczeniowych. Pożądane też byłoby uzyskanie dokładnego rozwiązania analitycznego równania nieliniowego.

Praca została wykonana w roku 2014 w ramach prac statutowych realizowanych w IMG PAN w Krakowie, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] Palmer K., Kratz H., Nguyen H., Thornell G., *A highly integratable silicon thermal gas flow sensor*. J. Micromech. Microeng., 22 (2012), 065015.
- [2] Engelen E., Kirchgassner H., Viga R., Grabmaier A., *Flow Measurement Technique for Unknown Fluids Based on Hot Wire by Self-Calibration via Thermal Time-of-Flight (TToF)*. Proc. Eurosensors XXVI, September 9-12, 2012, Kraków, Poland.
- [3] Dunn M.G., Hiemenz R.J., *Low-speed heat-pulse anemometer*. Rev. Sci. Instrum., 53, 342 (1982).

- [4] Lambert D.K., Harrington C.R., *An air flow sensor based on interface thermal wave propagation*. J. Appl. Phys., 59, 59 (1986).
- [5] Berthet H., Jundt J., Durivault J., Mercier B., Anglescu D., *Time-of-flight thermal flowrate sensor for lab-on-chip applications*. Lab Chip, 11, 181 (2011).
- [6] Shoji S., Esashi M., *Microflow devices and systems*. J. Micromech. Microeng., 4, 157 (1994).
- [7] Shapiro E., Drikakis D., *Theoretical, Numerical, and Experimental Study of the Time of Flight Flowmeter*. J. Fluids Eng., 133, Issue 4, 041401(2011).
- [8] Kielbasa J., *Fale cieplne w metrologii powolnych przepływów*. Wyd. AGH, Kraków, 1975.
- [9] Kielbasa J., *Pomiar prędkości przepływu ustalonego metodą fal cieplnych*. Archiwum Górnictwa, 2005, Vol. 50, nr 2, s. 191-208.
- [10] Rachalski A., *Absolute Measurements of Very Low Gas Flow Velocity by Means of Spectral Analysis of Thermal Wave*. Rev. Sci. Instrum., vol. 84, no 2/2013, 025105.
- [11] Wiśniewski S., Wiśniewski T., *Wymiana ciepła*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2000, s. 132.
- [12] Patankar S., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC Press, 1980.

Numerical investigation of the temperature field in the wake of source of thermal wave

Abstract

In this paper numerical solution of thermal wave propagation in a flowing gas was presented. Linear as well as nonlinear equation of heat transport equation was solved. The results were compared with experimental data. Nonlinear relation for thermal diffusion in the function of temperature affects thermal wave propagation, particularly for velocities lower than 20 cm/s.

Keywords: heat waves, flow velocity measurement, nonlinear phenomena