

# Czynniki wpływające na deformację warstwy przyściennej przy statycznym przepływie powietrza nad złożem porowatym oraz ich wpływ na prędkość poślizgu

## Część I: Turbulentna warstwa graniczna w sąsiedztwie ścianek chropowatych

MARIUSZ R. SŁAWOMIRSKI, PRZEMYSŁAW SKOTNICZNY

*Instytut Mechaniki Górotworu PAN, Ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków*

### Streszczenie

W artykule autorzy rozważają wpływ nierówności powierzchni na rozkład prędkości i własności turbulentnej warstwy granicznej. Omówiono wielowarstwowy model warstwy granicznej. Jeśli wysokość nierówności nie przekracza grubości podwarstwy lepkiej, wówczas chropowatość nie wpływa na obraz ruchu turbulentnego. W przeciwnym przypadku profil prędkości zostaje zmodyfikowany, a równania go wyrażające muszą być zmodyfikowane poprzez wprowadzenie tzw. funkcji chropowatości oraz ewentualnie tzw. funkcji śladu. Przedstawiono wyniki pomiarów wyrażających zależność prędkości uśrednionej, fluktuacji prędkości oraz naprężeń turbulentnych Reynoldsa od bezwymiarowej odległości od ścianki. Pokazano, że własności przepływu turbulentnego zależą nie tylko od skali ale i od geometrii nierówności powierzchni. Czynniki te nie zawsze mogą być w prosty sposób sprowadzone do zastępczej chropowatości piaskowej. Zależność funkcji chropowatości od zredukowanej skali chropowatości przedstawiono w postaci formuły analitycznej oraz w formie graficznej. Zaproponowano postać równań, które opisują rozkład prędkości średniej w turbulentnej warstwie granicznej w pobliżu chropowatej a zarazem przepuszczalnej ścianki z uwzględnieniem efektów przesunięcia (ang. *velocity shift*) i poślizgu (ang. *velocity slip*).

**Słowa kluczowe:** turbulentna warstwa graniczna, nierówność powierzchni, funkcja chropowatości, funkcja śladu

## 1. Przepływ turbulentny

Zgodnie z klasyczną definicją Hinze (1959) przepływ turbulentny jest nieregularnym ruchem płynu, w którym prędkość i inne parametry przepływu doznają nieprzewidywalnych, losowych zmian w przestrzeni i w czasie (tzw. fluktuacji), przy czym jednak pewne wartości średnie charakteryzujące przepływ mogą być określone.

Przepływ turbulentny jest ruchem silnie wirowym, dla którego charakterystyczne jest występowanie wirów o rozmaitych skalach wielkości, od porównywalnych z wymiarami obszaru, w którym odbywa się przepływ do mikrowirów o najmniejszej możliwej skali makroskopowej. Wiry wielkoskalowe są nośnikami największej energii kinetycznej; nie dyssypują jej jednak, lecz przekazują do wirów o mniejszej skali, te z kolei do wirów o jeszcze mniejszej skali i tak kolejno, wskutek czego w wirach o najmniejszej skali energia ulega finalnej dyssypacji i zamianie jej na ciepło (Landau i Lifshitz, 1944; Hinze, 1959; Elsner, 1987).

Badania doświadczalne przeprowadzone jeszcze w XIX wieku przez Reynoldsa i jego następców wykazały, że rozwój turbulencji zależy od wartości liczby kryterialnej, zwanej obecnie liczbą Reynoldsa  $Re$ , zdefiniowanej w sposób:

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{u} L}{\mu} \quad (1)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu,  $\bar{u}$  – jego prędkością uśrednioną,  $\mu$  – jego lepkością, a  $L$  jest wymiarem charakterystycznym zależnym od geometrii przepływu, np. dla przepływu przez rurę wymiarem charakterystycznym jest średnica rury, dla opływu kulki wymiarem charakterystycznym jest średnica kulki, etc. Turbulencja może, lecz nie zawsze musi rozwinąć się, gdy liczby Reynoldsa  $\text{Re}$  przekracza wartość krytyczną  $\text{Re}_{\text{cr}}$ . Szczegółowe badania doświadczalne wykazały, że wartość ta nie jest uniwersalna, lecz zależy od konkretnego rodzaju ruchu płynu. Na przykład, dla przepływu przez prostoliniowe rury okrągłe  $\text{Re}_{\text{cr}} = 2300$ .

Jak wykazał ostatecznie Lin (1946) przyczyną turbulencji jest niestateczność ruchu płynu, w którym oprócz zachowania regularnego, charakterystycznego dla przepływu laminarnego istnieje ciągle widmo zachowań alternatywnych. Ponieważ żadne z nich nie jest w jakiś szczególny sposób wyróżnione, rzeczywisty proces ruchu płynu ‘przeskakuje’ w sposób losowy z jednego alternatywnego zachowania do innego, co dla zewnętrznego obserwatora przejawia się w postaci chaotycznego ruchu turbulentnego.

Rola lepkości w powstawaniu turbulencji ma wyraźnie ambiwalentny charakter. Z jednej strony wzrost lepkości wpływa stabilizująco na charakter ruchu płynu, co przejawia się między innymi w tym, że wzrost lepkości występującej w mianowniku wzoru (1) pociąg za sobą spadek liczby Reynoldsa, a tym samym oddalanie się od wartości krytycznej  $\text{Re}_{\text{cr}}$ . Z drugiej jednak strony, lepkość stanowi istotną przyczynę niestabilności, a przepływy płynów idealnych, których lepkość z definicji równa się zeru, są zawsze regularne i żadna turbulencja w nich nie występuje.

Zgodnie z ideą Reynoldsa prędkość płynu w ruchu turbulentnym  $u$  przedstawić można jako sumę wartości średniej  $\bar{u}$  oraz losowej fluktuacji  $\hat{u}$ , tj.:

$$u = \bar{u} + \hat{u} \quad (2)$$

Wartość średnia prędkości  $\bar{u}$  definiowana jest najczęściej w sensie uśrednienia względem czasu  $t$ :

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t) dt \quad (3)$$

Przyjmuje się przy tym, że wartość średnia fluktuacji prędkości, a także jakiegokolwiek innego parametru przepływu, jest zawsze równa zeru:

$$\bar{\hat{u}} = 0 \quad (4)$$

natomiast wartość średnia kwadratu fluktuacji prędkości, a także jakiegokolwiek innego parametru przepływu, jest zawsze różna od zera:

$$\overline{(\hat{u})^2} \neq 0 \quad (5)$$

Można to łatwo sprawdzić przedstawiając fluktuację w postaci sinusoidalnej:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (6)$$

gdzie  $A$  jest amplitudą, a  $T$  okresem fluktuacji.

Za miarę intensywności fluktuacji prędkości przyjmuje się często średnią z kwadratu fluktuacji prędkości:

$$\tilde{u}^2 = \overline{\hat{u}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - \bar{u}]^2 dt \quad (7)$$

W literaturze intensywność fluktuacji prędkości oznacza się symbolami  $\tilde{u}$  lub  $\langle u' \rangle$ .

Biorąc pod uwagę statystyczny charakter przepływu turbulentnego wielkość ta odpowiada wariancji prędkości przepływu. Alternatywną miarą jest tzw. intensywność turbulencji  $I$  zdefiniowana w sposób:

$$I = \frac{\text{df} \sqrt{\hat{u}^2}}{\sqrt{(\bar{u})^2}} = \frac{\tilde{u}}{\bar{u}} \quad (8)$$

Wielkość ta wyraża odchylenie standardowe (tj. pierwiastek kwadratowy z wariancji) prędkości odniesione do prędkości średniej.

## 2. Turbulentna warstwa graniczna

Obecność sztywnych ścianek ograniczających obszar przepływu powoduje istotną modyfikację jego obrazu. W płynach rzeczywistych, zgodnie z zasadą niewystępowania poślizgu, pojedyncza warstwa cząstek płynu przykleja się do nieruchomej i nieprzepuszczalnej ścianki, tj. na samej ściance składowe wektora prędkości, zarówno styczna  $u$  jak i normalna do ścianki  $v$  są równe zero. Tym samym w pobliżu ścianek tworzy się obszar, w którym następuje szybki spadek prędkości płynu do zera.

Obszar ten nosi nazwę warstwy granicznej (ang. *boundary layer*). Zgodnie z definicją warstwa graniczna stanowi obszar w płynie w pobliżu sztywnych ścianek, w którym lepkość płynu i jego wirowość oraz kształt ścianek wpływają w sposób decydujący na obraz przepływu.

W przepływach laminarnych ruch płynu w warstwie granicznej ma charakter wyraźnie wirowy i silnie dysypatywny, przy czym dysypacja prędkości następuje na skutek lepkości płynu, która niezależnie od wielkości liczby Reynoldsa nie może być pominięta. Natomiast ruch płynu w przepływie zasadniczym (ang. *mainstream*) ma charakter bezwirowy i tym samym niewiele różni się od przepływu płynu idealnego.

Nieco inny charakter posiada przepływ w warstwie granicznej w przypadku turbulentnego ruchu w przepływie zasadniczym. Ruch płynu zarówno w warstwie granicznej jak i w przepływie zasadniczym posiada tutaj turbulentny charakter, jednakże w pobliżu brzegu warstwy granicznej i poza jej obszarem warstwy fluktuacje prędkości ulegają wyraźnemu wytłumieniu. Tym samym oznacza to, że w przepływie zasadniczym turbulencja ulega zanikowi, co wyraźnie widać na Rys. 2 i 3.

W turbulentnej warstwie granicznej wyróżnia się zazwyczaj kilka podwarstw. Wyróżnić je można wyraźnie korzystając z pokazanej na Rys. 1 zależności średniej prędkości przepływu od odległości od ścianki.

W najbliższej ściance podwarstwę zwaną podwarstwą lepka (ang. *viscous sublayer*) uśredniona szybkość ścinania określona w sposób:

$$\bar{D} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (9)$$

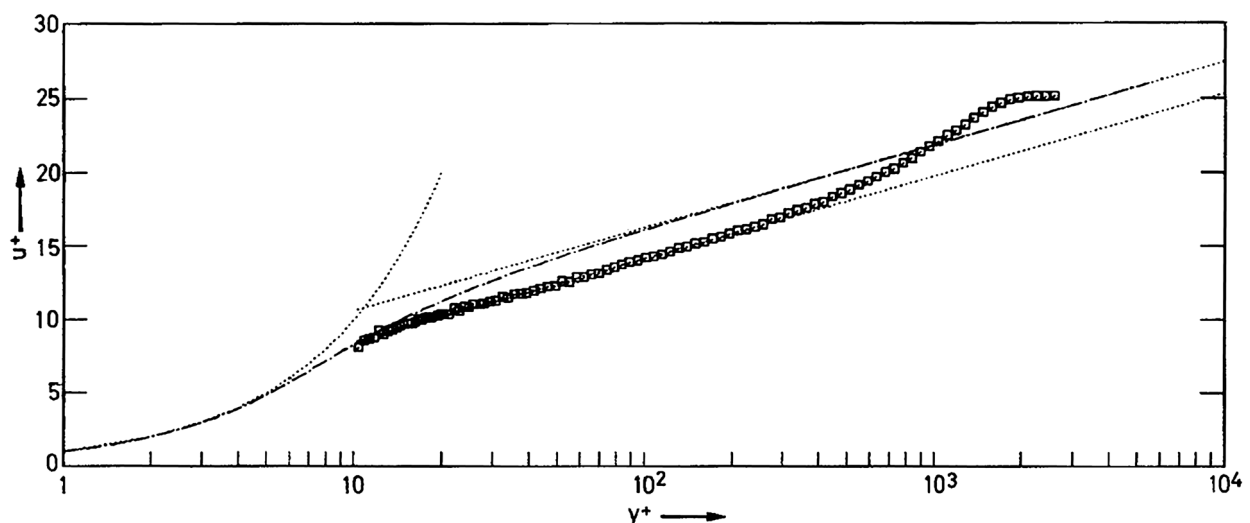


Fig. 1. Rozkład zredukowanej uśrednionej prędkości przepływu  $u^+$  w zależności od zredukowanej odległości od ścianki  $y^+$  stanowiącej powierzchnię odlewniczą, według Acharya et al. (1986)

osiąga najwyższy poziom. Ponieważ zmienność składowej prędkości normalnej do ścianki jest niewielka, dlatego też istotną rolę odgrywa tutaj jedynie pierwszy człon prawej strony równ. (9). Jego magnituda pomnożona przez lepkość płynu  $\mu$  i wyrażająca tym samym naprężenia lepkie jest na ogół wielka w porównaniu z magnitudą naprężeń Reynoldsa  $|\rho\hat{u}\hat{v}|$ , tj. mamy:

$$|\mu\bar{D}| = \left| \mu \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \right) \right| \gg |\rho\hat{u}\hat{v}| \quad (10)$$

Pociąga to za sobą marginalny udział czysto turbulენტnej dyssypacji energii w porównaniu z dyssypacją lepka. W konsekwencji ruch płynu w podwarstwie lepkiej (w sensie wartości średnich) przypomina nieco przepływ laminarny, a składowa prędkości średniej styczna do ścianki wzrasta liniowo z odległością od niej  $y$ , tj.:

$$\bar{u}(y) \sim \frac{\tau_*}{\mu} y \quad (11)$$

gdzie  $\tau_*$  jest wielkością naprężenia stycznego w płynie na ścianie (ang. *wall shear stress*), oznaczanego również w literaturze przez  $\tau_y$ .

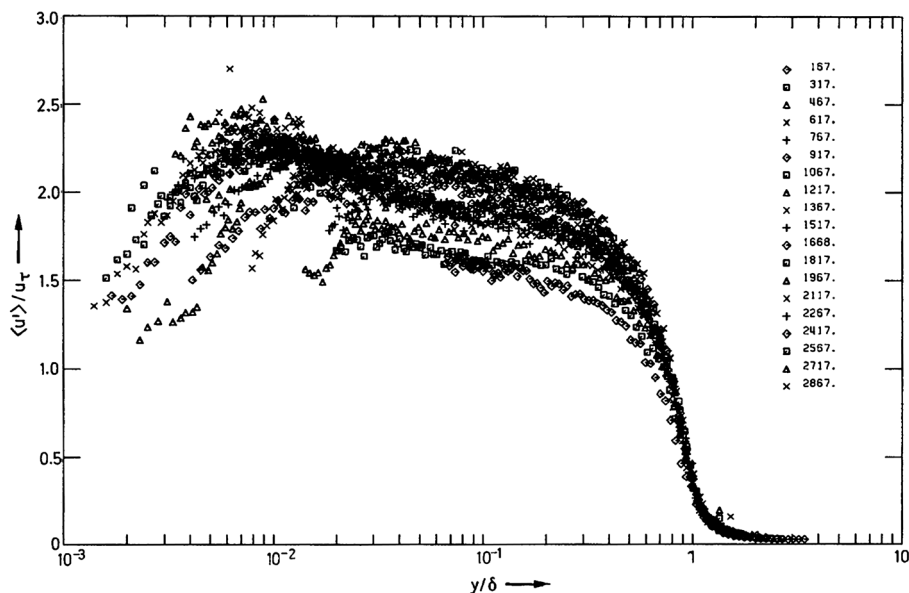


Fig. 2. Rozkład względnej intensywności fluktuacji prędkości  $\tilde{u}/u_*$  w zależności od bezwymiarowej odległości od ścianki  $y/\delta$  dla powierzchni odlewniczych o rozmaitych parametrach, według Acharya et al. (1986)

Rozkład prędkości średniej w podwarstwie lepkiej jest więc zbliżony do rozkładu prędkości przepływu laminarnego w najbliższym sąsiedztwie ścianki. Stąd też podwarstwę lepka nazywa się też niekiedy w sposób mylący ‘podwarstwą laminarną’, chociaż przepływ w niej pozostaje turbulენტny. Z drugiej jednak strony badania doświadczalne wskazują, że w podwarstwie lepkiej intensywność turbulencji silnie spada w miarę zbliżania się do ścianki, co widać wyraźnie na Rys. 2 i 3.

Z pojęciem naprężenia stycznego w płynie na ścianie związana jest wielkość o wymiarze prędkości, zwana ‘prędkością tarcia’ (ang. *wall shear velocity*) i zdefiniowana w sposób:

$$u_* = \sqrt{\frac{d\tau}{\rho}} \quad (12)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu.

W następnej z kolei podwarstwie zwanej buforową lub przejściową (ang. *buffer sublayer*) magnituda naprężeń lepkich  $|\mu D|$  jest tego samego rzędu wielkości co magnituda turbulentnych naprężeń Reynoldsa  $|\rho \hat{u} \hat{v}|$ :

$$|\mu \bar{D}| = \left| \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right| \sim |\rho \hat{u} \hat{v}| \quad (13)$$

Jest to więc strefa pośrednia między obszarem, w którym dominują naprężenia lepkie i obszarem, w którym dominują naprężenia turbulentne Reynoldsa. Z tego między innymi powodu nie udało się ustalić ściślejszej zależności między prędkością styczną do ścianki a odległością od niej.

Dla trzeciej podwarstwy zwanej podwarstwą logarymicznego rozkładu prędkości turbulentne naprężenia Reynoldsa przeważają zdecydowanie nad naprężeniami lepкими, tj.:

$$|\mu \bar{D}| = \left| \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right| \ll |\rho \hat{u} \hat{v}| \quad (14)$$

Dla strefy tej von Kármán korzystając z hipotezy drogi mieszania dla ruchu turbulentnego sformułowanej uprzednio przez Prandtla otrzymał na drodze rozważań teoretycznych następującą, logarymiczną postać rozkładu składowej prędkości stycznej do ścianki:

$$\bar{u}(y) = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{u_*}{\nu} y \right) + \beta + \frac{1}{\kappa} \ln \beta \right] \quad (15)$$

gdzie  $\nu$  jest lepkością kinetyczną płynu:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (16)$$

a  $\kappa$  i  $\beta$  są wielkościami stałymi.

Wielkość  $\kappa$  nazywana jest stałą von Kármána i według pomiarów doświadczalnych jej wartość wynosi około 0.4, choć w literaturze spotkać można również wartości 0.407, 0.410 i 0.417. Stała ta została wyznaczona pierwotnie dla rur okrągłych, lecz posiada ona jak się zdaje charakter uniwersalny. Druga stała

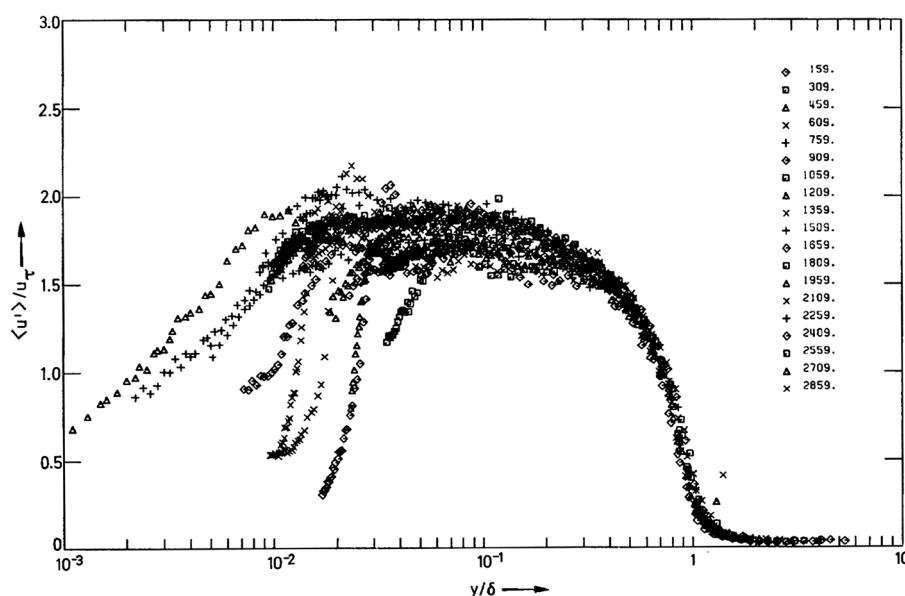


Fig. 3. Rozkład względnej intensywności fluktuacji prędkości  $\tilde{u}/u_*$  w zależności od bezwymiarowej odległości od ścianki  $y/\delta$  dla powierzchni chropowatych rozmaitych nierówności rozmaitych postaci siatek o rozmaitych parametrach, według Acharya et al. (1986)

oznaczona symbolem  $\beta$  przyjmuje dla rur wartość około 11.5 według pomiarów doświadczalnych. Podstawiając podane wyżej wartości 0.4 i 11.5 do równania (12) otrzymuje się:

$$\bar{u}(y) = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_*}{v} y \right) + 5.5 \right] \quad (17)$$

Równania (15), (17) uzyskał von Kármán przyjmując, że długość drogi mieszania  $l_m$  wynosi:

$$l_m = \kappa y \quad (18)$$

Wprowadzając parametry zredukowane: zredukowaną prędkość  $u^+$  i zredukowaną odległość  $y^+$  zdefiniowane w sposób:

$$u^+ = \frac{df \bar{u}}{u_*} \quad (19)$$

$$y^+ = \frac{df u_*}{v} y \quad (20)$$

można równanie (15) przedstawić w następującej uniwersalnej postaci:

$$u^+(y) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (21)$$

gdzie  $C$  jest stałą, którą należy wyznaczyć doświadczalnie dla danych warunków przepływu. W zależności od przyjmowanej wartości  $\kappa$  podawana w literaturze wartość  $C$  waha się w granicach 5.0-5.5.

Dla podwarstwy lepkiej zależność między zredukowaną prędkością styczną do ścianki  $u^+$  a zredukowaną odległością od niej sprowadza się do trywialnej postaci:

$$u^+(y) = y^+ \quad (22)$$

Badania doświadczalne wskazują, że miąższość podwarstwy lepkiej nie przekracza zredukowanej odległości równej 5, choć niekiedy podaje się w literaturze wyższe wartości. Zredukowanym odległościom od ścianki  $y^+$  mieszczącym się w granicach 5-30 odpowiada podwarstwa buforowa, natomiast strefa logarytmicznego rozkładu prędkości średniej obejmuje odległości zredukowane  $y^+$  przekraczające wartość 30. Hydrodynamiczne własności poszczególnych podwarstw przedstawia to w skrócie tabela 1.

Tab. 1. Hydrodynamiczna charakterystyka podwarstw turbulენტnej warstwy granicznej

Odległość zredukowana	Podwarstwa	Rozkład prędkości zredukowanej
$0 \leq y^+ \leq y_1^+ \in [3; 5]$	podwarstwa lepka	$u^+(y) = y^+$
$y_1^+ \leq y^+ \leq y_2^+ \in [30; 40]$	podwarstwa buforowa	?
$y_2^+ \leq y^+ \leq y_3^+ \in [10^2; 10^3]$	strefa logarytmicznego rozkładu prędkości	$u^+(y) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$
$y_3^+ \leq y^+ \leq y_4^+ \in [10^3; 10^4]$	podwarstwa prawa śladu	alternatywne formuły (25) – (29)
$y_4^+ \leq y^+ \leq y_5^+ = \delta$	strefa intermencji	alternatywne formuły (25) – (29)

W literaturze przyjmuje się na często, że wymienione tutaj trzy warstwy stanowią około 80% grubości warstwy granicznej (Elsner, 1987), lecz jest to sprawa dyskusyjna. Granica zewnętrzna strefy logarytmicznego rozkładu prędkości jest niewyraźna i mieści się ona w szerokim przedziale. Jak wskazują badania doświadczalne zmienia się ona z wielkością liczby Reynoldsa zgodnie ze wzorem empirycznym:

$$y_3^+ \sim (\text{Re}_\delta)^{n/(n+1)}, \quad n \cong 7 \quad (23)$$

gdzie  $\text{Re}_\delta$  jest liczbą Reynoldsa dla warstwy granicznej, tj. taką, w której wymiarem charakterystycznym jest grubość warstwy granicznej  $\delta$ .

$$\text{Re}_\delta = \frac{df \rho \bar{u} \delta}{\mu} \quad (24)$$

W czwartej z kolei podwarstwie rozkład prędkości przypomina rozkład prędkości w przepływie swobodnym, tj. w tzw. obszarze śladu (ang. *wake*). Stąd też podwarstwa ta nosi nazwę podwarstwy prawa śladu. Skala wirów jest tutaj dużo większa niż w trzech poprzednich warstwach, gdyż ich rozmiarów nie ogranicza już bliskość sztywnej ścianki. Dla podwarstwy tej jako parametrów charakterystycznych używa się prędkości średniej napływającego strumienia  $u_\infty$ , prędkości tarcia  $u_*$  oraz grubości całkowitej warstwy granicznej  $\delta$ .

Dla podwarstwy prawa śladu stosuje się alternatywnie kilka formuł wyrażających zależność między uśrednioną składową prędkością styczną do ścianki  $\bar{u}$  a zredukowaną odległością od niej  $y$ . Najczęściej wykorzystywana jest w tym celu następująca modyfikacja równania (14):

$$\bar{u}(y) = u_* \left[ A \ln \left( \frac{u_*}{\nu} y \right) + C \right] + \Delta_w \bar{u} \quad (25)$$

lub

$$\frac{u_\infty - \bar{u}(y)}{u_*} = -A \ln \left( \frac{y}{\delta} \right) - A \ln \left( \frac{u_*}{\nu} \delta \right) - C + \frac{U - \Delta_w \bar{u}}{u_*} \quad (26)$$

gdzie  $\Delta_w \bar{u}$  reprezentuje odchyłkę od typowego rozkładu logarytmicznego. Alternatywnie, stosuje się też jeden ze wzorów empirycznych opartych na formule potęgowej:

$$\frac{u_\infty - \bar{u}(y)}{u_*} = B \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (27)$$

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_\infty} = \sqrt[n]{\frac{y}{\delta}} \quad (28)$$

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_*} = E \sqrt[n]{\frac{u_*}{\nu} y} \quad (29)$$

gdzie, według pomiarów doświadczalnych stała  $B$  przyjmuje wartość około 9.6, stała  $E$  mieści się w przedziale 8.2-8.7, natomiast rząd pierwiastka  $n$  wynosi 7.0-7.7. Żadna z powyższych formuł nie posiada ścisłego uzasadnienia teoretycznego – stanowią one jedynie formuły doraźne opisujące w przybliżeniu rezultaty uzyskane w drodze doświadczalnej.

Ostatnia, zewnętrzna podwarstwa, zwana strefą intermittencji stanowi właściwie obszar przejścia warstwy granicznej do przepływu zasadniczego. W przepływie tym, jak już wcześniej zaznaczono, turbulencja wygasa, co potwierdzają rozkłady fluktuacji prędkości pokazane na Rys. 2 i 3.

Zewnętrzny brzeg strefy intermittencji jest arbitralny. Najczęściej przyjmuje się, że mieści się on w odległości od ścianki  $y_5$ , w której składowa prędkości średniej równoległa do ścianki  $\bar{u}$  osiąga 99% prędkości strumienia zasadniczego  $u_\infty$ . Odległość ta stanowi zarazem grubość warstwy granicznej  $\delta$ . Dla warstwy intermittencji przyjmuje się najczęściej te same wzory na rozkład prędkości średniej, co dla podwarstwy prawa śladu.

### 3. Wpływ chropowatości piaskowej na turbulentny przepływ płynu

Informacje przedstawione w rozdziale poprzednim dotyczyły charakterystyki turbulentnej warstwy granicznej w otoczeniu ścianki gładkiej. Występujące nierówności lub chropowatość ścianki, zwłaszcza bardziej wydatna modyfikują znacznie podany obraz stref warstwy granicznej.

Badania wpływu chropowatości ścianek na przepływ turbulentny natrafiają na problemy związane z potrzebą scharakteryzowania geometrycznie różnych form nierówności powierzchni przy pomocy prostego zestawu parametrów liczbowych. Problem ten nie został do chwili obecnej jednoznacznie rozwiązany: bezwzględna lub względna wysokość nierówności okazała się być niewystarczającym parametrem dla charakterystyki powierzchni, a próby zastosowania w to miejsce wymiaru fraktalnego zakończyły się fiaskiem.



Mimo dużej ilości badań w tej materii posługujemy się dotąd pewnymi parametrami zastępczymi, nie zawsze wystarczającymi do określenia chropowatości z hydrodynamicznego punktu widzenia.

Problem wpływu chropowatości ścianki na wielkość dyssypacji energii w przepływie turbulentnym badany był po raz pierwszy przez Nikuradsego (1933). Jego badania odnosiły się do przepływów w rurach okrągłych, a ich wynikiem był słynny wykres zwany obecnie harfą Nikuradsego. Jednolitą chropowatość powierzchni uzyskiwał Nikuradse pokrywając wewnętrzne strony rur pojedynczą warstwą ściśle upakowanych ziarenek piasku o określonej granulacji. Ten szczególny rodzaj chropowatości nosi nazwę ‘chropowatości piaskowej’ (ang. *sand grain roughness*). Do jego charakterystyki wystarczy jeden parametr liczbowy, zwany chropowatością piaskową  $k_s$ .

Dla charakterystyki wpływu chropowatości na przepływ turbulentny można posługiwać się też zredukowaną chropowatością piaskową  $k_s^+$  zdefiniowaną w sposób:

$$k_s^+ = \frac{df}{v} k_s u_* \quad (30)$$

Badania doświadczalne wykazały, że jeśli wysokość nierówności nie przekracza grubości podwarstwy lepkiej, wówczas istnienie chropowatości powierzchni przejawia się jedynie zmniejszeniem miąższości tej podwarstwy i zbliżeniem podwarstwy buforowej do ścianki. Chropowatość nie modyfikuje wówczas obrazu ruchu turbulentnego w pozostałych podwarstwach i nie posiada większego wpływu na dyssypację energii w ruchu turbulentnym.

Odpowiada to sytuacji, gdy:

$$k_s^+ \leq y_1^+ \cong 5 \quad (31)$$

W takim przypadku powierzchnię traktować możemy po prostu jako gładką, gdyż wszystkie nierówności ‘wygładzane’ są przez podwarstwę lepka. W popularnym wzorze Darcy’ego-Weissbacha na spadek ciśnienia  $\Delta P$  w rurze o średnicy  $D$  i długości  $l$

$$\Delta P = \lambda \frac{\rho(\bar{u})^2}{2D} l \quad (32)$$

oznacza to, że współczynnik oporu  $\lambda$  nie zależy od wielkości chropowatości względnej rury i stanowi on jedynie funkcję liczby Reynoldsa  $Re$ , tj:

$$k_s^+ \leq y_1^+ \cong 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda(Re) \quad (33)$$

W sytuacji, gdy wysokość nierówności przekracza podwarstwę lepka, przenika przez strefę buforową i zaczyna penetrować podwarstwę logarytmicznego profilu prędkości średniej, dochodzi do istotnej modyfikacji obrazu ruchu turbulentnego. Podwarstwy lepka i buforowa nie są w stanie ‘wygładzić’ wówczas nierówności powierzchni.

Odpowiada to sytuacji, gdy:

$$k_s^+ \geq y_2^+ \in [30; 40], \quad \text{oraz} \quad k_s^+ \leq [50; 70] \quad (34)$$

W takim przypadku powierzchni nie możemy już traktować jako gładkiej. We wzorze Darcy’ego-Weissbacha na spadek ciśnienia  $\Delta P$  w rurze (32) oznacza to, że współczynnik oporu  $\lambda$  stanowi funkcję zarówno liczby Reynoldsa  $Re$  jak i chropowatości względnej rury  $2k_s/D$ :

$$y_2^+ \in [30; 40] \leq k_s^+ \leq [50; 70] \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda(Re, 2k_s/D) \quad (35)$$

W przypadku w pełni rozwiniętej chropowatości powierzchni, gdy nierówności sięgają głęboko w podwarstwę logarytmicznego profilu prędkości mamy:

$$k_s^+ \geq [50; 70] \quad (36)$$

Wielkość liczby Reynoldsa  $Re$  nie posiada wówczas większego wpływu na charakter turbulencji, który zależy jedynie od wielkości chropowatości  $k_s$ . We wzorze Darcy’ego-Weissbacha na spadek ciśnienia



$\Delta P$  w rurze (32) oznacza to, że współczynnik oporu  $\lambda$  stanowi funkcję jedynie chropowatości względnej rury  $2k_s/D$ :

$$k_s^+ \geq [50; 70] \Rightarrow \lambda = \lambda(2k_s/D) \quad (37)$$

Podwarstwa lepka posiada tutaj charakter szczałkowy, lub nawet zanika całkowicie, a sam podział warstwy granicznej na podwarstwy jest mocno dyskusyjny; według niektórych specjalistów traci on w ogóle sens fizyczny.

#### 4. Warstwa graniczna w sąsiedztwie powierzchni chropowatych

Uwagi przedstawione w rozdziale poprzednim dotyczyły wyników badań przepływu przy chropowatości piaskowej powierzchni. Istnieją poważne wątpliwości, czy przenoszą się one na inne rodzaje chropowatości. Niektórzy specjaliści są jednak zdania, że inne rodzaje nierówności powierzchni sprowadzić można do nierówności piaskowej korzystając z przybliżonych wzorów.

W wyniku badań doświadczalnych Young (1950) doszedł do wniosku, że szeroka klasa chropowatości powierzchni może być sprowadzona do nierówności piaskowej wykorzystując podany przez niego wzór:

$$k_s = 1.6 \bar{k} \quad (38)$$

gdzie  $\bar{k}$  jest średnią wysokością nierówności.

Badając chropowatość powierzchni powstających w wyniku procesu mielenia Speidel (1962) zaproponował następujący sposób sprowadzania chropowatości rzeczywistej do chropowatości piaskowej:

$$k_s = \frac{1}{\alpha} k_t \quad (39)$$

gdzie  $k_t$  jest maksymalną wysokością nierówności, a współczynnik  $\alpha = 2.56$ , gdy proces mielenia postępuje prostopadłe do powierzchni oraz  $\alpha = 5.0$ , gdy proces mielenia postępuje równoległe do powierzchni.

Niemiecka norma DIN4767 definiuje uśrednioną chropowatość  $R_a$  jako wielkość średnią całkową z bezwzględnej wartości zarówno dodatnich jak i ujemnych nierówności powierzchni  $h$ :

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |h(x)| dx \quad (40)$$

Bammert i Sandstede (1976) podali następujący sposób przeliczania uśrednionej chropowatości wg DIN na chropowatość piaskową:

$$k_s = 2.19 R_a^{0.877} \quad (41)$$

przy czym  $R_a$  wyrażone jest w mikrometrach. Sugerowali oni możliwość stosowanie powyższego wzoru dla powierzchni maszynowych z zastrzeżeniem, że błąd przeliczania może sięgać nawet 50%. Natomiast Koch i Smith (1976) zaproponowali prostszy, liniowy sposób przeliczania chropowatości piaskowej:

$$k_s = 6.2 R_a \quad (42)$$

Przegląd i dyskusję rozmaitych sposobów przeliczania chropowatości rzeczywistej na chropowatość piaskową znaleźć można w pracach Younga i Patersona (1981) oraz Hodge'a (1979).

Alternatywnym w stosunku do przeliczania na chropowatość piaskową sposobem podejścia do zagadnienia warstwy granicznej w sąsiedztwie ścianek posiadających nierówności o rozmaitych formach jest modyfikacja równania (15) opisującego logarytmiczny profil prędkości średniej do postaci:

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_*}{v} y \right) + C - \frac{\Delta \bar{u}}{u_*} + W(y/\delta) \quad (43)$$

gdzie  $\Delta \bar{u}$  jest tzw. 'funkcją chropowatości' (ang. *roughness function*) lub 'przesunięciem prędkości średniej' (ang. *average velocity shift*), a  $W(\dots)$  jest tzw. 'funkcją śladu' (ang. *wake function*). Równanie (43) wyrażone przy pomocy parametrów zredukowanych przyjmuje postać:

$$\bar{u}^+(y) = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C^+ - \Delta u^+ + W^+(y/\delta) \quad (44)$$

Niektórzy specjaliści (np. Acharya et al., 1986) proponują inną modyfikację równ. (15) w postaci:

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \frac{u_*}{\nu} (y_m + \chi) \right\} + C - \frac{\Delta \bar{u}}{u_*} \quad (45)$$

We wzorze powyższym odległość od ścianki  $y$  zastąpiona została przez sumę  $y_m$  i  $\chi$ , przy czym  $y_m$  jest odległością mierzoną od pewnego punktu, a  $\chi$  jest tzw. 'odległością przesunięcia' (ang. *incremental distance*) od punktu przyjętego za początkowy w sensie aerodynamicznym. W przypadku gładkiej powierzchni  $\chi$  jest równe zero, lub też alternatywnie jest wielkością, która można bezpośrednio zmierzyć.

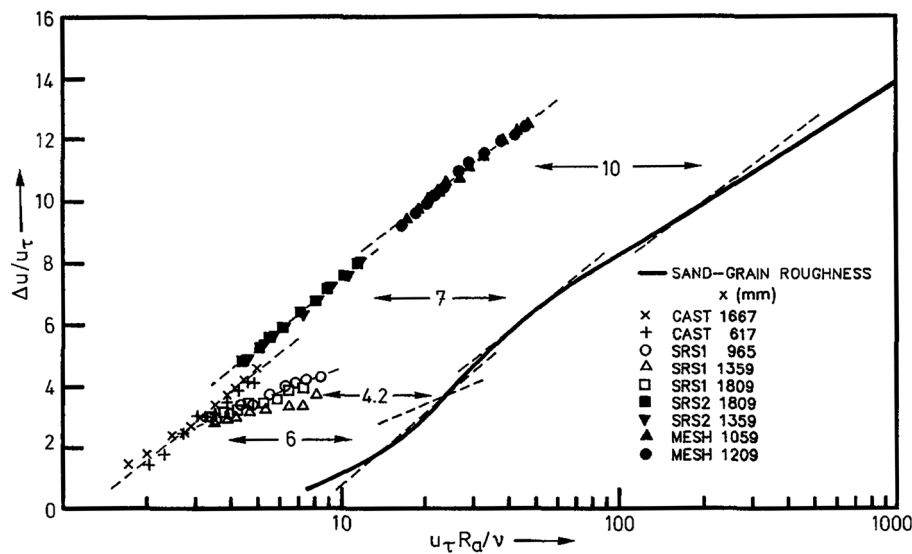


Fig. 4. Rozkład względnej funkcji chropowatości  $\Delta u/u_*$  w zależności od iloczynu prędkości tarcia i uśrednionej chropowatości wg DIN  $u_* R_q / \nu$  dla powierzchni o rozmaitych strukturach nierówności, według Acharya et al. (1986)

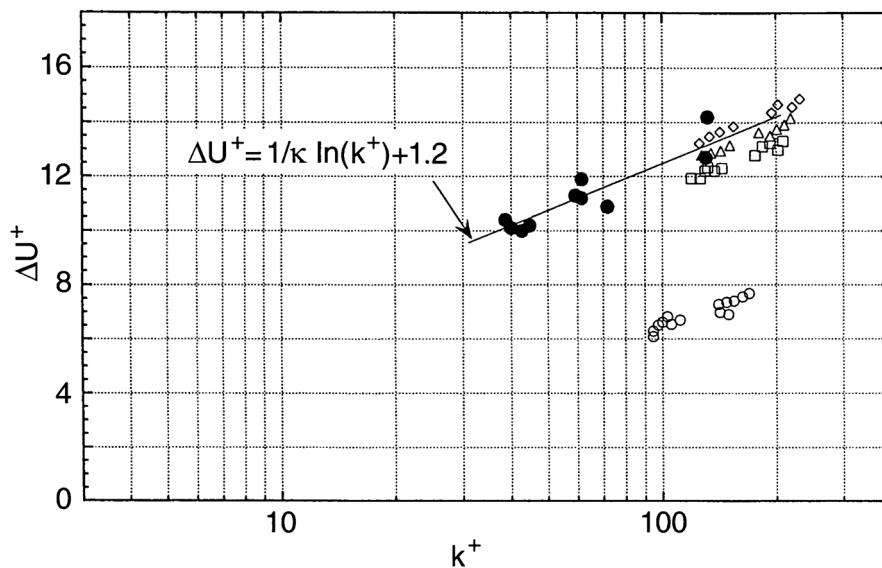


Fig. 5. Rozkład zredukowanej funkcji chropowatości  $\Delta U^+ / u_*$  w zależności od zredukowanej wielkości chropowatości  $k^+$ , według Krogstada i Antonii (1999)

Krogstad i Antonia (1999) zaproponowali następującą formułę opisującą zależność zredukowanej funkcji chropowatości  $\Delta u^+$  od zredukowanej wielkości chropowatości  $k^+$ :

$$\Delta u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(k^+) + G^+ \quad (46)$$

Według uzyskanych przez nich rezultatów doświadczalnych stała  $G^+$  przyjmuje wartość około 1.2, co pokazano na Rys. 5.

## 5. Warstwa graniczna w sąsiedztwie przepuszczalnych powierzchni chropowatych

Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej w warunkach chropowatej ścianki przepuszczalnej. Przepływ płynu przez taką ściankę modyfikować musi zjawiska w warstwie granicznej, dokonując korekty zarówno składowej stycznej do ścianki  $u$  jak i normalnej do niej  $v$ . Na ścianie normalna składowa prędkości  $v$  nie jest wówczas równa zeru, co może zarazem pociągać za sobą również poślizg oznaczający niezerową wartość składowej stycznej prędkości  $u$ .

W dotychczasowej literaturze brak jakichkolwiek odniesień do takiego przypadku. A taka właśnie sytuacja ma miejsce podczas turbulentnego przepływu powietrza na złożem porowatym. Złoże takie jest przepuszczalne, choć prędkość przepływu jest tutaj dużo mniejsza niż w turbulentnym strumieniu nad złożem. W samym złożu przepływ w zdecydowanej większości przypadków pozostanie zapewne laminarny, choć w mikroskali rozmiarów porów jest to z pewnością przepływ silnie wirowy. Natomiast sam brzeg złoża porowatego tworzy umowną powierzchnię chropowatą ze względu na strukturę materiału tworzącego złoże.

Ze względu na brak danych literaturowych zachodzi tutaj konieczność przeprowadzenia pionierskich badań, przede wszystkim doświadczalnych. Należy przy tym spróbować udzielić odpowiedzi na następujące pytania:

- i. Jak forma nierówności powierzchni szkieletu wpływa na postać funkcji chropowatości w przypadku przepuszczalnego brzegu ?
- ii. Jak należy wówczas dobrać parametry  $y_m$  i  $\chi$  we wzorze (45)?
- iii. Czy w przypadku przepływu przez brzeg złoża występuje zjawisko poślizgu stycznego?
- iv. Jak należy modyfikować parametry  $y_m$  i  $\chi$  we wzorze (45) w przypadku przepływu przez brzeg?
- v. Czy pojęcie prędkości tarcia na ścianie posiada wówczas jakikolwiek sens fizyczny, czy też należałoby go zmodyfikować lub wprowadzić w jego miejsce inne pojęcie?
- vi. Jak należałoby wówczas zmodyfikować wielkość prędkości tarcia na ścianie?

Ostatecznej odpowiedzi na powyższe pytania udzielić mogą jedynie rezultaty solidnie przeprowadzonych i żmudnych badań doświadczalnych. Pokusić się jednak można o wysunięcie pewnych sugestii mogących przyczynić się do ukierunkowania badań empirycznych.

Parametry  $y_m$  i  $\chi$  pozwalają na uwzględnienie zjawiska poślizgu pod warunkiem, że istnieje możliwość ich doświadczalnego wyznaczenia. Natomiast w odniesieniu do prędkości tarcia  $u_*$  dokonać można modyfikacji polegającej na jej 'poślizgowym przesunięciu' o wartość  $u_{\#}$ . Oczywiście w przypadku, gdy ścianka będzie nieprzepuszczalna powinniśmy mieć  $u_{\#}$  równe zeru. Otrzymamy wówczas następujące równanie rozkładu prędkości:

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_* - u_{\#}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \frac{u_* - u_{\#}}{v} (y_m + \chi) \right\} + C - \frac{\Delta_{\#} \bar{u}}{u_* - u_{\#}}, \quad u_* > u_{\#} \quad (47)$$

gdzie  $\Delta_{\#} \bar{u}$  jest zmodyfikowaną funkcją chropowatości.

Wzór powyższy posiada sens jedynie wtedy, gdy prędkość poślizgu jest mniejsza od prędkości tarcia, tj.  $u_{\#} < u_*$ . Wartość prędkości tarcia  $u_*$  odpowiada tutaj sytuacji, gdy powierzchnia ścianki posiada taką samą strukturę nierówności, jest jednak nieprzepuszczalna.

Alternatywną propozycją modyfikacji w celu uwzględnienia przepuszczalności ścianki chropowatej jest wprowadzenie dodatniego parametru korekcyjnego  $\varpi$ , po zaimplementowaniu którego rozkład prędkości przyjmuje postać:

$$\frac{\bar{u}(y)}{\varpi u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \frac{\varpi u_*}{v} (y_m + \chi) \right\} + C - \frac{\Delta_{\#} \bar{u}}{\varpi u_*}, \quad \varpi > 0 \quad (48)$$

Parametr korekcyjny  $\varpi$ , podobnie jak prędkość poślizgu  $u_{\#}$  musiałby być wyznaczany empirycznie. Doświadczalnego wyznaczenia wymagałaby również funkcja chropowatości  $\Delta_{\#} \bar{u}$  występująca we wzorach (47) i (48). Zaproponowane tutaj formuły (47), (48) sugerować mogą kierunek badań w zakresie zachowania się turbulentnej warstwy granicznej w sąsiedztwie przepuszczalnych ścianek chropowatych, gdyż jak dotąd niewiele zrobiono w odniesieniu do wyjaśnienia procesów i określenia wpływu poszczególnych parametrów na zjawiska zachodzące w tym zakresie.

### Podziękowanie

Niniejsza publikacja stanowi prezentację wyników uzyskanych w trakcie realizacji zadania T1Z1.3 *Czynniki wpływające na deformację warstwy przyściennej przy statycznym przepływie powietrza nad złożem porowatym oraz ich wpływ na prędkość poślizgu* wykonywanego w ramach prac statutowych Instytutu Mechaniki Górotworu PAN w 2012 roku, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

### Literatura

- ACHARYA M., ESCUDIER M.P., (1987): *Turbulent flow over mesh roughness*, in *Turbulent Shear Flows*, Edited by F. DURST et al., Vol. 5, pp. 176-185, Springer Verlag, Berlin.
- ACHARYA M., BORNSTEIN J., ESCUDIER M.P., (1986): *Turbulent boundary layers on rough surfaces*, *Experiments in Fluids*, **4**, 33.
- BAMMERT K., SANDSTEDT H. (1976): *Influences of manufacturing tolerances and surface roughness of blade on the performance of turbines*, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **98**, 29.
- BATCHELOR G.K., (1967): *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- CEBECI T., CHANG K.C., (1978): *Calculation of incompressible rough-wall boundary layer flows*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **16**, 730.
- ELSNER J.W., (1987): *Turbulencja przepływów*, PWN, Warszawa.
- HINZE J.O., (1959): *Turbulence*, McGraw-Hill, New York.
- HOGDE B.K., (1979): *An assessment of rough boundary layer calculation methods*, in *Proceeding of the ASME Symposium on Turbulent Boundary Layers, Niagara Falls, New York*, pp. 197-208.
- HOWARTH L., (1959): *Laminar Boundary Layers*, in *Handbuch der Physik*, herausgegeben von S. FLÜGGE und C. TRUESDELL, Bd. VIII/1 *Strömungsmechanik I*, Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg.
- VON KÁRMÁN T., (1930): *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*, *Göttinger Nachr. Math. Phys. Kl.*, pp. 58-76.
- KOCH C.C., SMITH L.H., (1976): *Loss sources and magnitudes in axial flow compressors*, *Journal of Engineering Power*, **98**, 411.
- KROGSTAD P.A., ANTONIA R.A., (1999): *Surface roughness effects in turbulent boundary layers*, *Experiments in Fluids*, **27**, 450.
- LANDAU L.D., LIFSHITS E.M., (1944): *Mekhanika sploshnykh sred*, Moskva, wydanie polskojęzyczne *Mechanika ośrodków ciągłych*, Warszawa, (1958).
- LIN C.C., (1946a): *On the stability of laminar flow. Part I*, *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 117.
- LIN C.C., (1946b): *On the stability of laminar flow. Part II*, *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 217.
- LIN C.C., (1946c): *On the stability of laminar flow. Part III*, *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 277.
- NIKURADSE J., (1933): *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*, V.D.I. Forschung-H., Bd. 361.
- PRANDTL L., (1904): *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, *Verhandlungen der dritten Internationale Mathematische Kongress, Heidelberg, 1904*; Druck: Leipzig, (2005).
- SCHLICHING H., (1938): *Experimentall Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem*, *Ingenieur-Archiv*, **7**, 1.
- SCHLICHING H., (1965): *Entstehung der Turbulenz*, in *Handbuch der Physik*, herausgegeben von S. FLÜGGE und C. TRUESDELL, Bd. VIII/1 *Strömungsmechanik I*, Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg.
- SCHLICHING H., (1965): *Grenzschicht-Theorie*, Braun, Karlsruhe.
- SCHLICHING H., GERSTEIN K., (2000): *Boundary Layer Theory*, Springer, Berlin.
- SPEIDEL L., (1962): *Ermittlung der notwendigen Oberflächengüte und eventueller Rauigkeitsverluste bei Dampfturbinen*,

Elektrizitätswirtschaft, **21**, 799.

YOUNG A.D., (1950): *The drag effects of roughness at high subcritical speeds*, Journal of Royal Aeronautical Society, **18**, 534.

YOUNG A.D., PATERSON J.H., (1981): *Aircraft excrescence drag*, AGARDograph, 264.

## **Factors Affecting the Velocity Shift and the Deformation of the Boundary Layer for Steady Air Flows over Porous Bed**

### **Part I: The Turbulent Boundary Layer in The Vicinity of Rough Rigid Walls**

#### **Abstract**

In the paper the authors discuss the influence of surface roughness on the mean velocity profile and properties of the turbulent boundary layer. The multi-strata model of the turbulent boundary layer has been discussed. When roughness height does not exceed the thickness of the viscous sublayer, the wall roughness does not influence on the turbulent flow. In the opposite case the velocity profile is modified. The equations expressing the mean velocity profile may then be modified by means of introduction of the roughness function and wake function. The results of measurements concerning the dependence of reduced mean velocity, velocity fluctuations, and Reynolds stress on the distance from the wall have been presented in the graphical form. It is shown that the turbulent flow properties depend explicitly on roughness geometry which in many situations cannot be reduced to the sand roughness. The dependence of the roughness function on the reduced roughness scale has been expressed in the analytical and graphical forms. The equations which describe the average velocity profile for turbulent boundary layer in the vicinity of rough and permeable wall involving the shift and slip phenomena have been proposed.

**Keywords:** turbulent boundary layer, surface roughness, wake function, roughness function