Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN
Tom 18, nr 4, grudzień 2016, s. 157-168

Wybrane zagadnienia aproksymacji charakterystyk statycznych termoanemometrów CTA

Aleksander Olczyk

Politechnika Łódzka, Instytut Maszyn Przepływowych, ul. Wólczańska 219/223, 90-924 Łódź

Streszczenie

W artykule przeanalizowano możliwości aproksymacji odwrotnych charakterystyk termoanemometrów stałotemperaturowych (CTA) za pomocą różnych funkcji. Porównano wyniki aproksymacji z wykorzystaniem funkcji wielomianowych (3-go i 4-go stopnia), wykładniczych (eksponencjalnej, Stirliga oraz Gompertza) a także funkcji potęgowej. Wykorzystując wskaźniki jakości aproksymacji (takie jak współczynnik determinacji czy błąd średniokwadratowy) dokonano ilościowej oceny poszczególnych metod na bazie trzech różnych zestawów danych pochodzących z rzeczywistych wzorcowań termoanemometrów.

Słowa kluczowe: sonda termoanemometryczna, prosta i odwrotna charakterystyka statyczna, wzorcowanie, aproksymacja, współczynnik determinacji, błąd średniokwadratowy

1. Wstęp

Pomimo intensywnego rozwoju metod optycznych, pozwalających na określanie i wizualizowanie pól prędkości, termoanemometria jest nadal szeroko wykorzystywana w metrologii przepływów. Jej główne zalety wynikają z możliwości miniaturyzacji elementu pomiarowego, jakim jest grzane włókno termoanemometru, co przekłada się na korzystne właściwości dynamiczne czujnika. Z tego powodu, atrakcyjność metod termoanemometrycznych ujawnia się głównie w obszarze przepływów nieustalonych, a szczególnie szybkozmiennych. W obszarze częstości zmian sygnału na poziomie kilkudziesięciu-kilkuset Hz, termoanemometria pozostaje jedyną dostępną metodą pomiaru prędkości przepływu. Jedną z trudności; jakie pojawiają się w procesach pomiarowych wykorzystujących termoanemometry, jest dokonanie właściwego opisu analitycznego ich charakterystyk statycznych a także zmienność tych charakterystyk w czasie. Różnice w przebiegu charakterystyk statycznych wynikają z wpływu wielu parametrów określających właściwości fizyczne i elektryczne samego drutu, detali konstrukcyjnych czujnika, a przede wszystkim braku pełnej powtarzalności w procesie wykonywania końcówek pomiarowych. Zmienność charakterystyk jest z kolei uwarunkowana powierzchniowym utlenianiem włókna oraz osadzaniem się drobinek kurzu, pyłu lub cząsteczek oleju pochodzących zwykle ze sprężarki zasilającej układ sprężonego powietrza lub stanowiących posiew w przypadku jednoczesnego stosowania metod PIV.

W literaturze można znaleźć wiele prac dotyczących termoanemometrii. Na gruncie polskim, największy dorobek w tym obszarze posiada krakowski Instytut Mechaniki Górotworu PAN [1], który prowadził zarówno prace studialne w tym zakresie, jak i liczne symulacje (w tym symulacje właściwości dynamicznych) a także prace doświadczalne. Metody termoanemometryczne w niestacjonarnych pomiarach 1D [2] oraz 3D [6] były także szeroko wykorzystywane w pracach eksperymentalnych realizowanych w Instytucie Maszyn Przepływowych PŁ (wiele z nich we współpracy z ośrodkami zagranicznymi jak RWTH Aachen oraz LTAMT St. Cyr l'Ecole). Mimo bogatej literatury w tym zakresie, zagadnienie aproksymacji charakterystyk statycznych termoanemometru jest zwykle traktowane marginalnie.

2. Charakterystyka statyczna termoanemometru

Szczegółowy opis zasady działania termoanemometru stałoprądowego przedstawiono w pracy [3]. Wynikająca z równania bilansu strumieni ciepła dostarczanego do włókna przez przepływający prąd oraz odbieranego przez omywający włókno płynący czynnik zależność, jest zwykle przedstawiana w postaci (1) znanej pod nazwą równania Kinga:

$$U^2 = A + B(\rho v)^N \tag{1}$$

gdzie:

- U – napięcie wyjściowe z termoanemometru;
- ρ – gęstość płynącego czynnika;
- v – prędkość przepływu;
- A, B, N – współczynniki równania do wyznaczenia na drodze wzorcowania.

Występujące w równaniu Kinga iloczyn (ρv) jest nazywany w literaturze gęstością strumienia masy lub prędkością masową φ_m [4]:

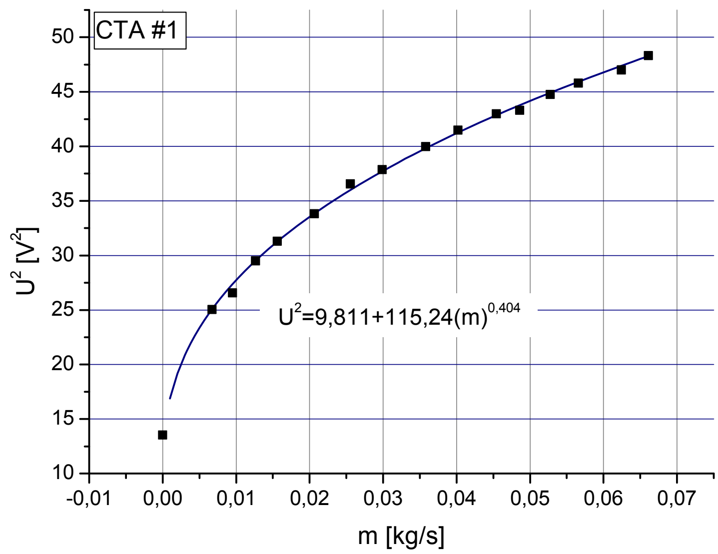
$$\varphi_m = \frac{\dot{m}}{S} = \rho v \tag{2}$$

gdzie $\dot{m}$ jest strumieniem masy a S polem powierzchni przekroju poprzecznego kanału.

W wielu wypadkach, kiedy termoanemometr jest wzorcowany przy użyciu przepływomierza, prędkość masową wygodnie jest zastąpić wprost strumieniem masy $\dot{m}$, co prowadzi do zależności:

$$U^2 = A' + B' \dot{m}^{N'} \tag{3}$$

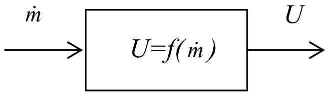
Równanie Kinga w większości przypadków dobrze aproksymuje rzeczywiste charakterystyki termoanemometrów (por. Rys. 1).



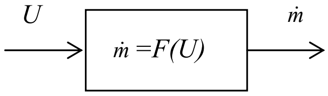
Rys. 1. Typowa charakterystyka statyczna termoanemometru CTA i jej aproksymacja równaniem Kinga (badania własne autora)

Równanie Kinga w postaci $U = f(\dot{m})$ opisuje charakterystykę statyczną termoanemometru. Charakterystyka ta jest oczywiście wynikiem wzorcowania statycznego, w którym zadaje się znany (mierzony wzorcowym przepływomierzem) strumień masy i rejestruje wyjściowy sygnał napięciowy z termoanemometru.

W trakcie pomiarów mamy do czynienia z zadaniem odwrotnym: na podstawie sygnału napięciowego chcemy określić wartość odpowiadającego mu strumienia masy (prędkości masowej). W tym celu konieczna jest znajomość odwrotnej charakterystyki statycznej będącej funkcją $\dot{m} = F(U)$, gdzie F jest funkcją odwrotną do funkcji f ($F = f^{-1}$). Zależności te ilustruje rysunek 2.



Charakterystyka statyczna (prosta)



Charakterystyka statyczna odwrotna

Rys. 2. Schemat charakterystyki statycznej prostej i odwrotnej termoanemometru

3. Dobór równania charakterystyki odwrotnej termoanemometru

Równanie Kinga (1) okazuje się niewygodne podczas pomiarów, z uwagi na skomplikowaną postać jego funkcji odwrotnej. W tej sytuacji należy poszukiwać prostszej funkcji, która w prawidłowy sposób opisze charakterystykę odwrotną termoanemometru.

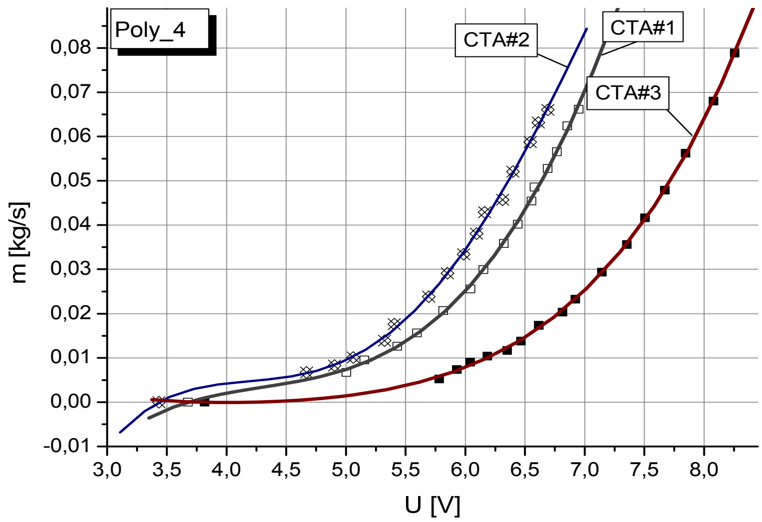
Amerykański producent systemów termoanemometrycznych, firma TSI [7], stosuje opis charakterystyk odwrotnych w postaci wielomianu 4-go stopnia. Na rysunku 3 przedstawiono charakterystyki odwrotne dla trzech różnych zestawów punktów pochodzących z wzorcowań termoanemometrów oznaczonych jako CTA#1, CTA#2 oraz CTA#3. We wszystkich tych termoanemometrach zastosowano włókna wolframowe o średnicy 5 µm jednak posiadały one różne końcówki pomiarowe i nieco inne wartości przegrzewu. Dla tych trzech zestawów danych opisanych współrzędnymi $(U_i, \dot{m}_i)_j$; gdzie i jest numerem punktu pomiarowego a j numerem termoanemometru; dokonano aproksymacji za pomocą wielomianu 4-go stopnia (równ. 4).

$$\dot{m} = E_0 + E_1 U + E_2 U^2 + E_3 U^3 + E_4 U^4 \tag{4}$$

Wartości współczynników dla poszczególnych termoanemometrów zestawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Wartości współczynników wielomianu 4-go stopnia, użytego do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

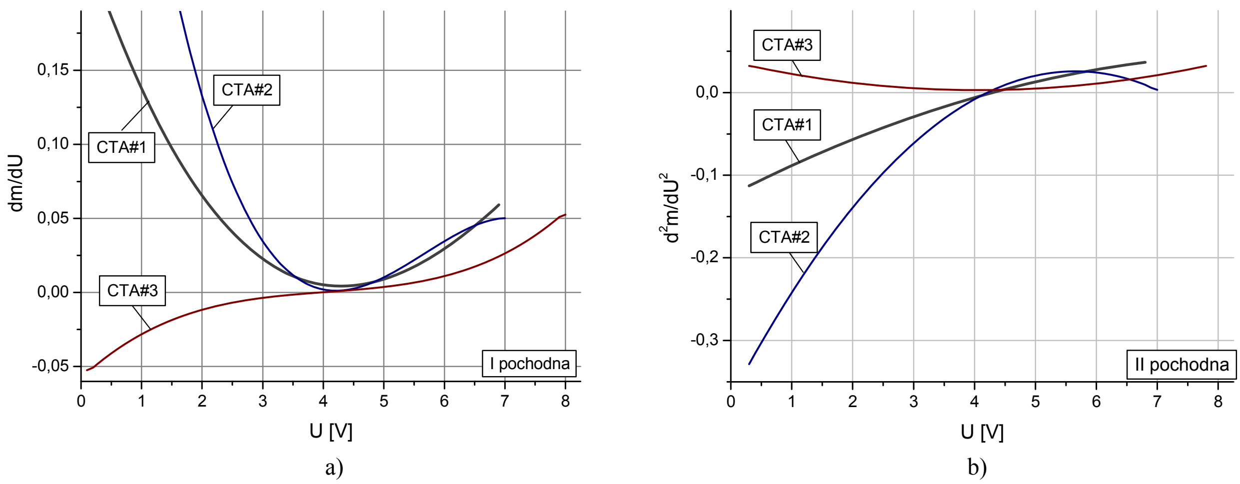
	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
	[kg/s]	[kg/sV]	[kg/sV^2]	[kg/sV^3]	[kg/sV^4]
CTA#1	–0,3378	0,2435	–0,0621	0,00631	–0,000174
CTA#2	–0,7686	0,6247	–0,1864	0,02329	–0,00103
CTA#3	0,0696	–0,0578	0,0186	–0,00283	0,000174



Rys. 3. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej termoanemometru wielomianem 4-go stopnia

Charakterystykę termoanemometru CTA#1 potraktowano jako referencyjną. Opisująca ją funkcja jest monotoniczna (por. przebieg I pochodnej na Rys. 4a – nie występuje zmiana jej znaku) i w przeważającej części zakresu pomiarowego dobrze opisuje przebieg charakterystyki odwrotnej, jednak w jej początkowym zakresie pojawia się punkt przegięcia: $U = 4{,}32$ V (por. przebieg II pochodnej – Rys. 4b.), co pogarsza jakość dopasowania krzywej do punktów pomiarowych.

Właściwości metrologiczne charakterystyki odwrotnej przetwornika CTA#2 przy aproksymacji wielomianem 4-go stopnia są jeszcze gorsze. Wartość pierwszej pochodnej w otoczeniu punktu $U = 4{,}30$ V jest bliska zeru i choć I pochodna nie zmienia znaku (warunek monotoniczności jest nadal spełniony), charakterystyka w dość szerokim przedziale napięć wyjściowych jest płaska (jej czułość statyczna $dU/d\dot{m}$ jest bliska nieskończoności).



Rys. 4. Przebiegi I (a) i II (b) pochodnej charakterystyki odwrotnej aproksymowanej wielomianem 4-go stopnia

Dodatkowo w jej przebiegu pojawiają się dwa punkty przegięcia[1] (por przebieg krzywej CTA#2 – Rys. 4b). W przypadku przetwornika CTA#3, opis wielomianem 4-go stopnia należałoby w ogóle odrzucić, ponieważ I pochodna zmienia znak dla $U = 4{,}00$ V (por. Rys. 4a) i charakterystyka staje się niejednoznaczna (jednej wartości sygnału wejściowego odpowiada więcej niż jedna wartość sygnału na wyjściu). Charakterystykę tę cechuje z kolei brak punktów przegięcia (por. Rys. 4b).

Problemy z opisem charakterystyki odwrotnej termoanemometru w jej początkowym zakresie wynikają z jego bardzo dużej czułości w obszarze małych prędkości masowych (por. Rys. 1). Zwykle pierwszy punkt charakterystyki zdejmuje się w stojącym powietrzu ($\dot{m}$ =0), a wygenerowanie bliskich zeru przepływów jest technicznie bardzo trudne. Z uwagi na bardzo wysoką czułość termoanemometru, najmniejsze możliwe otwarcie zaworu regulacyjnego skutkuje już wyraźnym przyrostem sygnału napięciowego na wyjściu. W efekcie początkowy obszar charakterystyki jest pozbawiony punktów, co bardzo utrudnia prawidłową aproksymację.

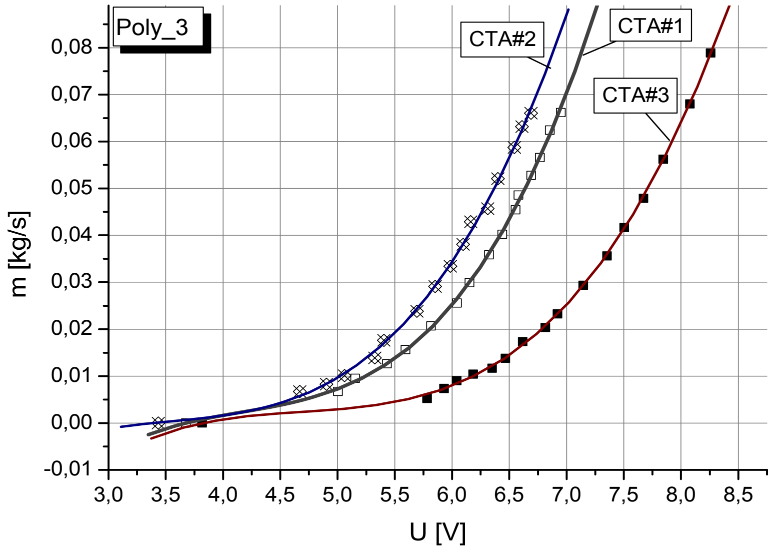
Nieco lepszy efekt uzyskuje się w przypadku aproksymacji charakterystyki odwrotnej wielomianem 3-go stopnia (równ. 5).

$$\dot{m} = E_0 + E_1 U + E_2 U^2 + E_3 U^3 \tag{5}$$

Oprócz korzyści w postaci zmniejszenia liczby współczynników równania, żadna z trzech charakterystyk nie jest niejednoznaczna (por. wykresy I pochodnych – Rys. 6a), choć każda posiada punkt przegięcia (Rys. 6b).

Wartości współczynników dla aproksymacji wielomianem 3-go stopnia dla poszczególnych termoanemometrów zestawiono w tabeli 2.

[1] Drugi z punktów przegięcia leży poza obszarem w którym występują punkty pomiarowe.

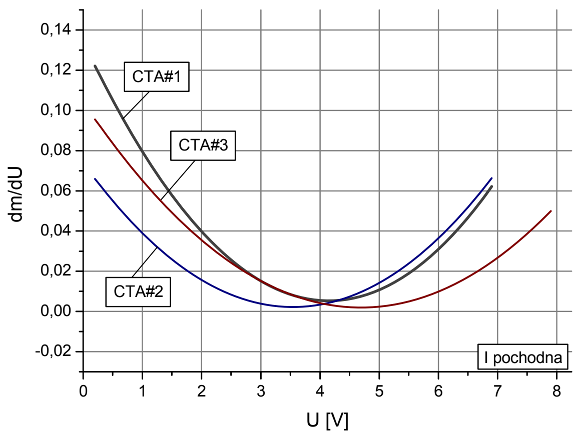


Rys. 5. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej termoanemometru wielomianem 3-go stopnia

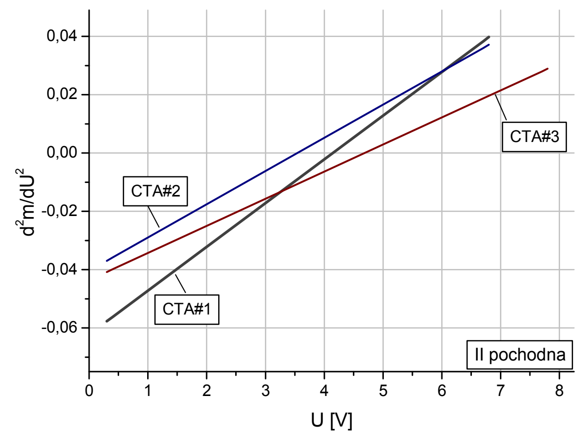
Tab. 2. Wartości współczynników wielomianu 3-go stopnia, użytego do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

	E_0	E_1	E_2	E_3
	[kg/s]	**[kg/sV]**	**[kg/sV^2]**	**[kg/sV^3]**
CTA#1	–0,1961	0,1342	–0,0311	0,0025
CTA#2	–0,0920	0,0737	–0,0202	0,0019
CTA#3	–0,1653	0,1041	–0,0218	0,00155

Z przedstawionego porównania wynika, że wielomian 3-go stopnia zapewnia lepszą jakość aproksymacji odwrotnych charakterystyk analizowanych termoanemometrów niż wielomian 4-go stopnia, szczególnie w początkowym obszarze charakterystyki odwrotnej (brak efektu niejednoznaczności charakterystyki). Wniosek ten nie może być jednak uogólniony z uwagi na ograniczony materiał badawczy, jaki wykorzystano do analizy.



a)



b)

Rys. 6. Przebiegi I (a) i II (b) pochodnej charakterystyki odwrotnej aproksymowanej wielomianem 3-go stopnia

W pracy [4], autor zaproponował do aproksymacji charakterystyki odwrotnej funkcję wykładniczą w postaci:

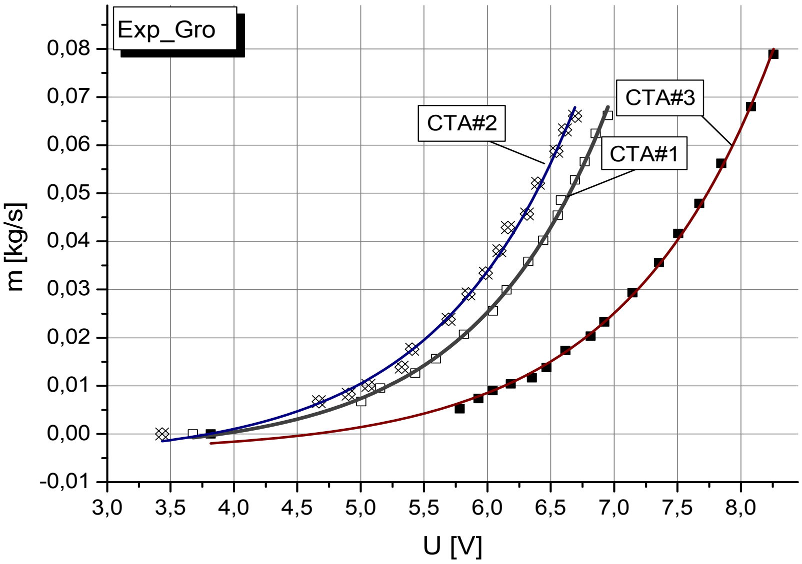
$$\dot{m} = \dot{m}_0 + A_1 e^{\frac{U}{t_1}} \tag{6}$$

określanej w literaturze anglojęzycznej jako ExpGro (exponential growth) Przebieg krzywych aproksymujących charakterystyki termoanemometrów CTA#1-3 zgodnie z tą funkcją przedstawiono na rysunku 7, a wartości współczynników równań w tabeli 3. Zaletą takiego sposobu aproksymacji jest brak niejednoznaczności charakterystyki oraz brak punktów przegięcia, co wynika z właściwości funkcji wykładniczej (por. Rys. 8a i b – pochodną funkcji wykładniczej jest również funkcja wykładnicza).

Tab. 3. Wartości współczynników funkcji wykładniczej ExpGro, użytej do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

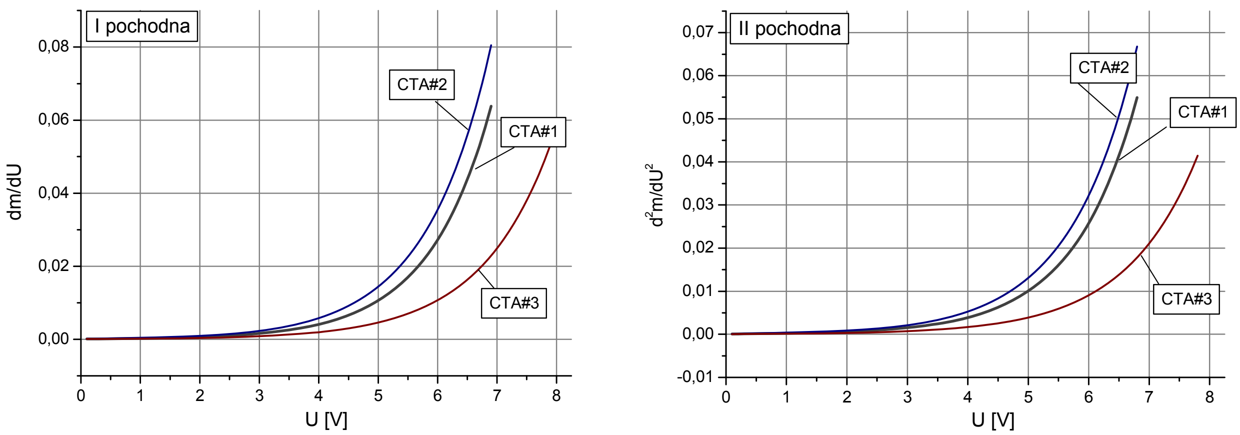
	$\dot{m}_0$	A_1	t_1
	[kg/s]	**[kg/s]**	**[V]**
CTA#1	-0,00403	0,00010	1,0590
CTA#2	-0,00534	0,00017	1,1027
CTA#3	-0,00392	0,00008	1,1842

Pewną niedogodnością jest konieczność iteracyjnego wyznaczania współczynników równania aproksymującego (brak analitycznego rozwiązania układu równań wynikającego z metody najmniejszej sumy kwadratów).



Rys. 7. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej funkcją wykładniczą (ExpGro)

Zasadniczym problemem jest jednak fakt, że w początkowym obszarze charakterystyki aproksymowana prędkość masowa osiąga wartości ujemne (por. Rys. 7), co jest oczywiście pozbawione sensu fizycznego. W przypadkach, kiedy mierzone prędkości masowe są na tyle duże, że korzystanie z początkowego obszaru



a) b)

Rys. 8. Przebiegi I (a) i II (b) pochodnej charakterystyki odwrotnej aproksymowanej funkcją wykładniczą wg równ (4) charakterystyki nie jest konieczne, ten sposób aproksymacji jest wart rozważenia. Jednak w niektórych sytuacjach (jak np. pomiary w przepływie pulsacyjnym o dużej amplitudzie zmian prędkości, kiedy jej wartość zbliża się do zera [4]), korzystanie z aproksymacji tego typu wprowadzałoby niedopuszczalne błędy.

Bardzo podobne rezultaty daje aproksymacja funkcją wykładniczą z przesunięciem argumentu (Exp_Grow):

$$\dot{m} = \dot{m}_0 + A_1 e^{\frac{(U-U_0)}{t_1}} \tag{7}$$

oraz funkcja eksponencjalna Stirlinga:

$$\dot{m} = a + b\left(\frac{e^{kU}-1}{k}\right) \tag{8}$$

Przebiegi tych funkcji oraz wartości współczynników dla termoanemometrów CTA#1-3 przedstawiono na rysunku 9 oraz w tabeli 4.

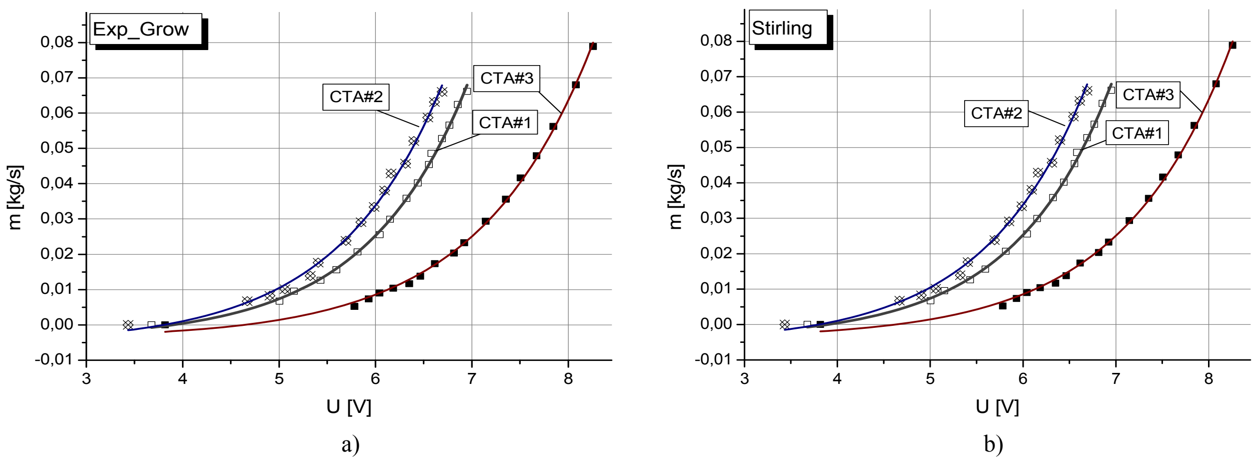
Tab. 4. Wartości współczynników funkcji wykładniczej Ex_Grow oraz funkcji Stirlinga użytych do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

Exp_Grow

	φ_{m0}	A_1	t_1	U_0
	[kg/s]	[kg/s]	[V]	[V]
CTA#1	–0,00403	0,00513	1,0590	4,1541
CTA#2	–0,00534	0,00611	1,1027	3,9521
CTA#3	–0,00392	0,00351	1,1842	4,4989

Stirling

	a	*b*	*k*
	[kg/s]	[kg/sV]	[1/v]
CTA#1	–0,00393	0,00010	0,9442
CTA#2	–0,00517	0,00015	0,9067
CTA#3	–0,00384	0,00007	0,8443



Rys. 9. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej funkcją wykładniczą Exp_Grow (a) oraz funkcją Stirlinga (b)

Powyżej opisanych wad pozbawiona jest funkcja Gompertza[2] będąca funkcją podwójnie wykładniczą w postaci:

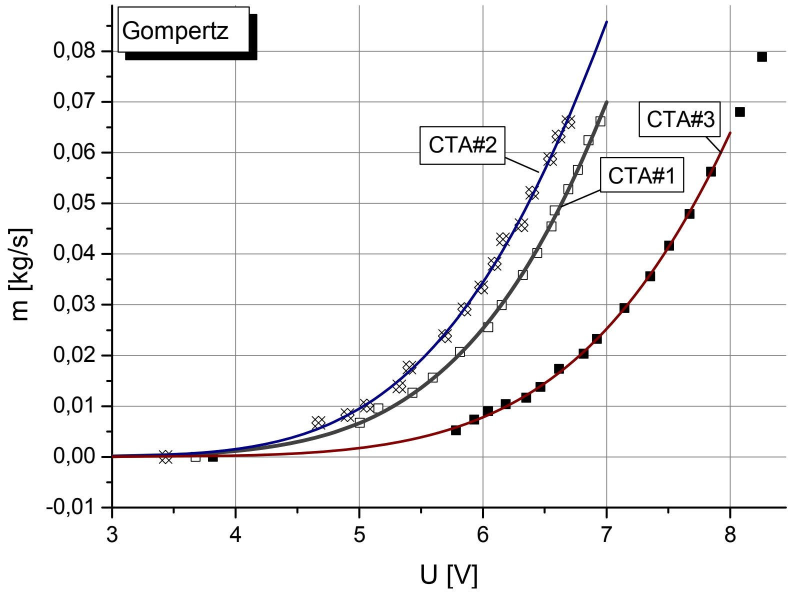
$$\dot{m} = ae^{-e^{(-k(U-U_c))}} \tag{9}$$

[2] Benjamin Gompertz (1779-1865) – genialny angielski matematyk-samouk i aktuariusz, członek The Royal Society. Jest znany głównie jako twórca nowatorskich modeli demograficznych, m. in. Prawa Gompertza opisującego śmiertelność populacji.

Przebiegi tej funkcji wykorzystanej do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1 – przedstawiono na rysunku 10, a wartości otrzymanych współczynników zebrano w tabeli 5.

Tab. 5. Wartości współczynników funkcji podwójnie wykładniczej (równanie Gompertza), użytej do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

	a	***k***	U_c
	[kg/s]	**[1/V]**	**[V]**
CTA#1	1,7905	0,2724	11,7552
CTA#2	0,7796	0,3458	7,9561
CTA#3	1,9993	0,2387	13,1815



Rys. 10. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej funkcją Gompertza

Funkcja Gompertza zapewnia najlepszą jakość dopasowania krzywych aproksymujących do punktów pomiarowych. Wartości strumienia masy monotonicznie dążą do zera w miarę zmniejszania wartości sygnału napięciowego. Krzywe nie posiadają punktów przegięcia.

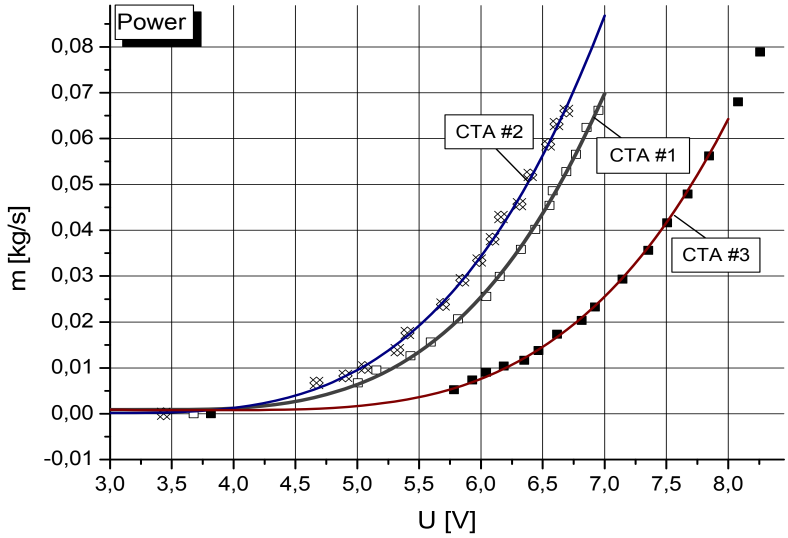
Wszystkie przedstawione powyżej funkcje aproksymujące przebieg charakterystyki odwrotnej termoanemometru CTA są próbą jak najlepszego dopasowania krzywej do punktów pomiarowych, są jednak dobierane metodą prób i błędów i ich postać nie wynika z fizyki zjawisk zachodzących w czujniku termoanemometrycznym, tak jak ma to miejsce w przypadku równania Kinga (1). Biorąc pod uwagę fakt, iż równanie to opisuje funkcja potęgowa, dokonano jeszcze próby aproksymacji charakterystyki odwrotnej funkcją w postaci:

$$\dot{m} = \dot{m}_0 + A\left|U - U_0\right|^P \tag{10}$$

Jest to również funkcja potęgowa w stosunkowo ogólnej postaci, zawierającej człon addytywny, multiplikatywny oraz przesunięcie argumentu.

Na rysunku 11 przedstawiono wyniki aproksymacji charakterystyk odwrotnych badanych termoanemometrów za pomocą tej funkcji, a w tabeli 6 zestawiono uzyskane współczynniki poszczególnych równań.

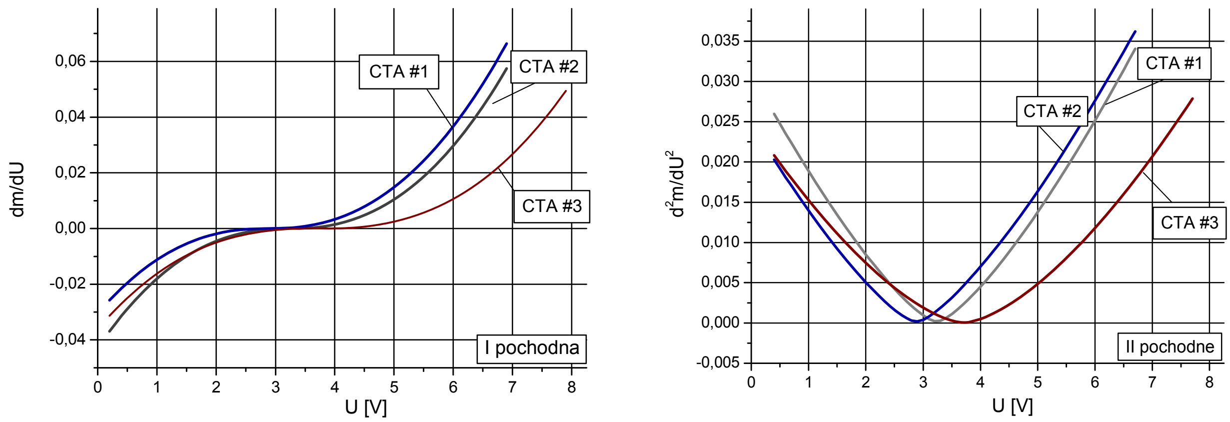
Wprawdzie funkcja (10) nie jest monotoniczna w całej dziedzinie (por. Rys. 12a), jednak zmiana znaku I pochodnej następuje poza obszarem występowania punktów pomiarowych (zawsze na lewo od pierwszego punktu charakterystyki). Można więc ją uznać za monotoniczną w obszarze wzorcowania termoanemometru lub – odwracając zagadnienie – stosować ją w obszarze monotoniczności (na prawo od minimum). W funkcji tej nie występują także punkty przegięcia – II pochodna zbliża się do zera jednak nie osiąga wartości 0. Wartości funkcji w punktach odpowiadających jej minimum są na poziomie 10^{-4} kg/s, a więc są bliskie zeru, co dobrze odwzorowuje fizykę zjawisk. Powyższe wnioski wskazują więc na bardzo wysoką przydatność funkcji potęgowej do opisu charakterystyk odwrotnych termoanemometru.



Rys. 11. Aproksymacja odwrotnej charakterystyki statycznej funkcją potęgową

Tab. 6. Wartości współczynników funkcji potęgowej, użytej do aproksymacji charakterystyk termoanemometrów CTA#1, CTA#2, CTA#3

	$\dot{m}_0$	A	U_0	P
	[kg/s]	**[kg/sV]**	**[V]**	**[-]**
CTA#1	0,00089	0,00082	3,234	3,342
CTA#2	0,00017	0,00076	2,882	3,346
CTA#3	0,00077	0,00036	3,707	3,550



a) b)

Rys. 12. Przebiegi I (a) i II (b) pochodnej charakterystyki odwrotnej aproksymowanej funkcją potęgową wg równ. (10)

Ilościowe porównanie jakości aproksymacji za pomocą poszczególnych krzywych przedstawiono w punkcie 4.

4. Ocena jakości aproksymacji charakterystyk termoanemometru

Do oceny jakości aproksymacji stosuje się kilka wskaźników, pozwalających określić ilościowo stopień dopasowania krzywej do punktów pomiarowych.

Oznaczając:

x_i, y_i – współrzędne punktów pomiarowych;

$\hat{y}_i$ – wartość rzędnej dla punktu x_i, wynikająca z przyjętego równania aproksymującego;

n – liczba dostępnych punktów pomiarowych można zdefiniować następujące wskaźniki:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$$ – suma kwadratów różnic (Error Sum of Squares);

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2$$ – całkowita suma kwadratów (Total Sum of Squares);

gdzie:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \,;$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$ – wsp. determinacji;

$$\phi = 1 - R^2$$ – wsp. zbieżności.

W przypadku idealnego dopasowania krzywej do punktów pomiarowych $R^2 = 1$. Dopasowanie uznaje się za bardzo dobre, jeśli $R^2 > 0{,}95$.

Odnosząc wskaźnik *SSE* do liczby punktów pomiarowych, uzyskuje się tzw. błąd średniokwadratowy *MSE* (*Mean Squared Error*):

$$MSE = \frac{SSE}{n}$$

oraz jego pierwiastek *RMSE* (Root Mean Squared Error): $RMSE = \sqrt{MSE}$.

Dla analizowanych charakterystyk: $x_i = U_i$ oraz $y_i = \varphi_{mi}$.

Poniżej zebrano wartości wyżej zdefiniowanych współczynników dla badanych termoanemometrów CTA#1-3 oraz opisanych w p. 3. modeli aproksymacji. Kolorem szarym wyróżniono najkorzystniejsze z punktu widzenia jakości aproksymacji parametry dla poszczególnych termoanemometrów.

Z porównania parametrów określających jakość aproksymacji wynika jednoznacznie, iż najlepsze rezultaty uzyskuje się przy zastosowaniu funkcji Gompertza (9) oraz funkcji potęgowej (10), dla których wartości współczynnika determinacji są bliskie jedności, a parametry SSE, MSE oraz RMSE osiągają najmniejsze wartości spośród wszystkich badanych funkcji. Dodatkową zaletą aproksymacji za ich pomocą są niewielkie różnice wartości uzyskiwanych parametrów dla różnych zestawów danych (por. wyniki dla termoanemometrów CTA #1-3 – Rys. 13 i 14). Tej właściwości nie posiadają funkcje wielomianowe, dla których ujawniły się istotne różnice w jakości aproksymacji dla poszczególnych zestawów danych.

Aproksymacja wielomianem 4-go stopnia			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$1{,}15 \cdot 10^{-5}$	$5{,}04 \cdot 10^{-4}$	$5{,}13 \cdot 10^{-6}$
MSE	$0{,}72 \cdot 10^{-6}$	$3{,}15 \cdot 10^{-5}$	$0{,}30 \cdot 10^{-6}$
RMSE	$0{,}85 \cdot 10^{-5}$	$5{,}61 \cdot 10^{-3}$	$0{,}55 \cdot 10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9982	0,9270	0,9994
ϕ^2	$1{,}7 \cdot 10^{-3}$	$7{,}3 \cdot 10^{-2}$	$5{,}9 \cdot 10^{-3}$

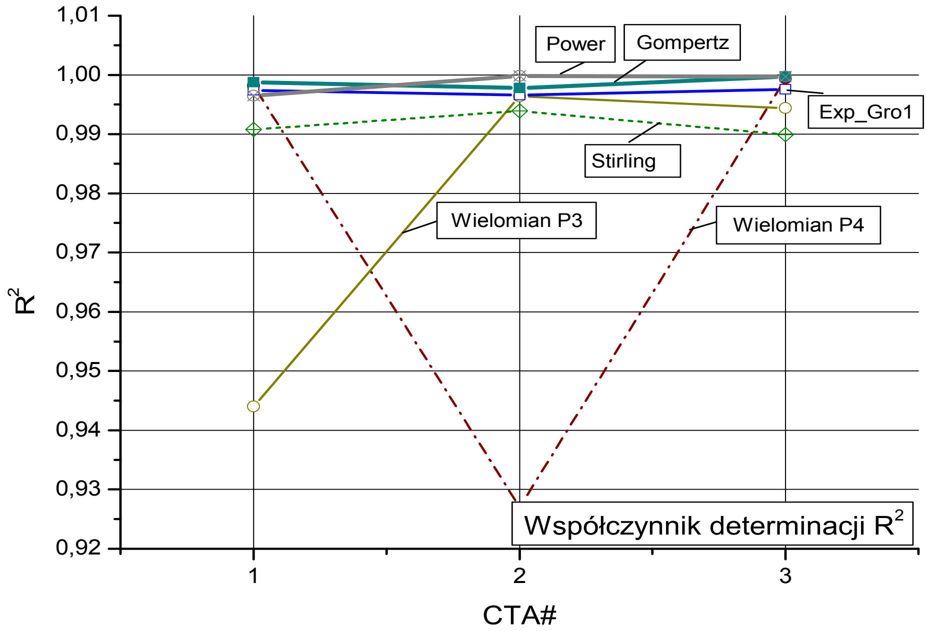
Aproksymacja wielomianem 3-go stopnia			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$3{,}71 \cdot 10^{-4}$	$2{,}50 \cdot 10^{-5}$	$4{,}89 \cdot 10^{-5}$
MSE	$2{,}32 \cdot 10^{-5}$	$1{,}57 \cdot 10^{-6}$	$2{,}88 \cdot 10^{-6}$
RMSE	$4{,}82 \cdot 10^{-3}$	$1{,}25 \cdot 10^{-3}$	$1{,}70 \cdot 10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9440	0,9964	0,9944
ϕ^2	$5{,}5 \cdot 10^{-2}$	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$5{,}6 \cdot 10^{-3}$

Aproksymacja funkcją wykładniczą Exp_Gro			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$1{,}6842 \cdot 10^{-5}$	$2{,}32 \cdot 10^{-5}$	$2{,}07 \cdot 10^{-5}$
MSE	$1{,}05 \cdot 10^{-6}$	$1{,}45 \cdot 10^{-6}$	$1{,}22 \cdot 10^{-6}$
RMSE	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$1{,}20 \cdot 10^{-3}$	$1{,}10 \cdot 10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9974	0,9966	0,9976
ϕ^2	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$

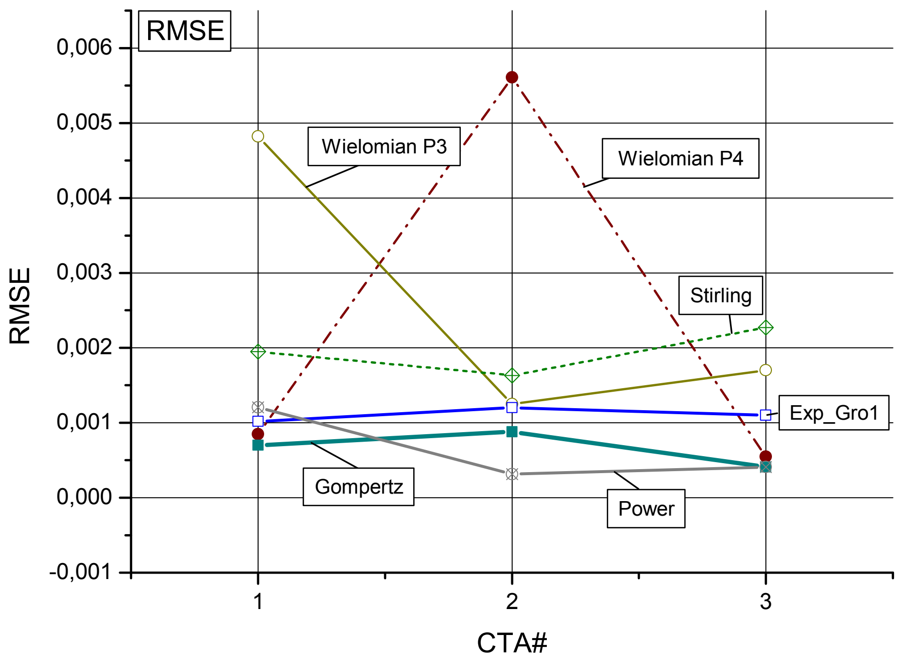
Aproksymacja funkcją Stirlinga			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$6{,}09 \cdot 10^{-5}$	$4{,}25 \cdot 10^{-5}$	$8{,}75 \cdot 10^{-5}$
MSE	$3{,}80 \cdot 10^{-6}$	$2{,}66 \cdot 10^{-6}$	$5{,}15 \cdot 10^{-6}$
RMSE	$1{,}95 \cdot 10^{-3}$	$1{,}63 \cdot 10^{-3}$	$2{,}27 \cdot 10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9908	0,9939	0,9899
ϕ^2	$9{,}2 \cdot 10^{-3}$	$6{,}1 \cdot 10^{-3}$	$10{,}1 \cdot 10^{-3}$

Aproksymacja funkcją Gompertza			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$7{,}93\cdot10^{-6}$	$1{,}24\cdot10^{-5}$	$2{,}87\cdot10^{-5}$
MSE	$0{,}50\cdot10^{-6}$	$0{,}78\cdot10^{-6}$	$0{,}17\cdot10^{-6}$
RMSE	$0{,}70\cdot10^{-3}$	$0{,}88\cdot10^{-3}$	$0{,}41\cdot10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9988	0,9978	0,9997
ϕ^2	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}2\cdot10^{-3}$	$0{,}3\cdot10^{-3}$

Aproksymacja funkcją potęgową			
	CTA#1	**CTA#2**	**CTA#3**
SSE	$2{,}32\cdot10^{-5}$	$1{,}57\cdot10^{-6}$	$2{,}88\cdot10^{-6}$
MSE	$1{,}45\cdot10^{-6}$	$0{,}98\cdot10^{-7}$	$0{,}17\cdot10^{-6}$
RMSE	$1{,}20\cdot10^{-3}$	$0{,}31\cdot10^{-3}$	$0{,}41\cdot10^{-3}$
SST	0,00663	0,00691	0,00869
R^2	0,9965	0,9998	0,9997
ϕ^2	$3{,}5\cdot10^{-3}$	$2{,}3\cdot10^{-3}$	$0{,}3\cdot10^{-3}$



Rys. 13. Wartości współczynnika determinacji R_2 dla termoanemometrów CTA#1-3 dla poszczególnych funkcji aproksymujących



Rys. 14. Wartości pierwiastka z błędu średniokwadratowego RMSN dla termoanemometrów CTA#1-3 dla poszczególnych funkcji aproksymujących

5. Podsumowanie i wnioski

Dokonana analiza możliwości opisu odwrotnych charakterystyk statycznych termoanemometru za pomocą wielomianów (3-go i 4-go stopnia), funkcji wykładniczych (Exp_Gro, Exp_Grow, funkcja Stirlinga oraz funkcji podwójnie wykładniczej Gompertza), a także funkcji potęgowej (Power), wskazuje na największą przydatność do aproksymacji tych dwóch ostatnich. Krzywe aproksymujące w postaci funkcji Gompertza są funkcjami monotonicznymi o drugiej pochodnej nie zmieniającej znaku (brak punktów przegięcia), dla których prędkość masowa nie osiąga wartości ujemnych (wartości $\dot{m}$ dla $U \rightarrow 0$ są na poziomie $1 \cdot 10^{-11} \div 1 \cdot 10^{-9}$ kg/s a więc w praktyce $\dot{m} \rightarrow 0$). Funkcja potęgowa w obszarze wzorcowania również jest monotoniczna i pozbawiona punktów przegięcia, jednak nie jest możliwa jej ekstrapolacja poza obszar monotoniczności. Jej wartości w ekstremum (minimum), leżącym w pobliżu pierwszego punktu wzorcowania (bez przepływu) są na poziomie $1 \cdot 10^{-4}$ kg/s, co dobrze odwzorowuje fizykę zjawisk. Wskaźniki jakości aproksymacji dla obydwu tych funkcji są bardzo zbliżone, osiągając wartości bardzo bliskie jedności. Pewną wadą tych funkcji jest konieczność iteracyjnego wyznaczania ich współczynników, biorąc jednak pod uwaga dostępność programów posiadających wbudowane narzędzia aproksymacyjne, nie jest to istotny mankament. Wartą uwagi w procedurze aproksymacyjnej jest również funkcja wielomianu 3-go stopnia, wielokrotnie wykorzystywana w praktyce przez autora (m.in. w pracy [5]).

Literatura

[1] Ligęza P.: *Układy termoanemometryczne – struktura, modelowanie, przyrządy I systemy pomiarowe.* AGH – Uczelniane Wydawnictwo Naukowo Dydaktyczne, Kraków 2001.

[2] Olczyk A.: *Specific mass flow rate measurements in a pulsating flow of gas*. Metrology and Measurement Systems, Vol. XV, No. 2, 2008, pp. 165-176.

[3] Olczyk A., Hammoud A.: *Problemy pomiaru chwilowego strumienia masy w przepływie niestacjonarnym za pomocą sondy termoanemometrycznej*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Cieplne Maszyny Przepływowe, nr 686, 1993, pp. 187-209.

[4] Olczyk A.: *Analiza niestacjonarnych zjawisk przepływowych w przewodach zasilanych pulsacyjnie*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 1003, seria Rozprawy Naukowe, zeszyt 360, 2009.

[5] Olczyk A.: *Modelowanie i badania eksperymentalne przepływu pulsacyjnego przez przewody rozgałęzione.* Sprawozdanie z projektu badawczego MNiSW, nr 3536/B/T02/2008/34, 2011.

[6] Smolny A., Błaszczak J., Pawlak R.: *Three-dimensional flow-field measurements in multistage turbomachinery using a computer-aided system.* SPIE Proceedings Vol. 3054, Optoelectronic and Electronic Sensors II, 1997.

[7] TSI Inc.: *Advantage to the look-up table approach of voltage-velocity conversion in thermal anemometry*. Technical note 2007; *http://www.tsi.com*

Selected problems of static characteristics approximation of CTA hot wire anemometers

Abstract

Possibilities of approximation of inverse static characteristics of constant temperature hot-wire anemometers, by means of different functions were analyzed in the paper. The results of approximation with use of polynomials (3^{rd} and 4^{th} degree), exponential functions (exponential growth, Stirling and Gompertz function) as well as power function were presented and compared. Applying some coefficients describing the quality of approximation (like coefficient of determination or mean squared error), quantitative evaluation of particular methods was done, on the basis of three different data sets, originating from real hot wire calibrations.

Keywords: hot wire anemometer, direct and inversed static characteristic, calibration, approximation, coefficient of determination, mean, squared, error