

Analiza powstawania przepływu wstecznego przy opływie ciał sztywnych

MARIUSZ R. SŁAWOMIRSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

Streszczenie

Przedstawiono analizę ruchu płynu rzeczywistego w pobliżu sztywnych ścianek ciała w warunkach przepływu akcelerycyjnego i deceleracyjnego. Przepływ w warstwie granicznej rozważany jest w oparciu o równania Prandtla. Korzystając z numerycznych rozwiązań samopodobnych równań przepływu wykazano, że przepływ akcelerycyjny jest ruchem regularnym, natomiast w przepływie deceleracyjnym występują osobliwości odpowiadające liniom i punktom oderwania. Obszarem oderwania odpowiada rodzina konkurencyjnych rozwiązań, z których tylko nieliczne posiadają sens fizyczny. Jako kryterium fizycznej poprawności przyjęto warunek zanikania rotacji prędkości w miarę oddalania się od sztywnej ścianki. Przedstawiono złożone rozważania oparte na metodach sami-perturbacyjnych dotyczące przepływu w sąsiedztwie punktu oderwania. Analiza równań przepływu dla funkcji prądu Ψ przed i za punktem oderwania wykazała, że ściśle rozwiązania równań Prandtla które poprawnie opisują ruch płynu w warstwie granicznej przed punktem oderwania nie posiadają swojej kontynuacji w obszarze oderwania, tj. za punktem oderwania.

Słowa kluczowe: warstwa graniczna, równania Prandtla, przepływ recyrkulacyjny, oderwanie warstwy granicznej

1. Warstwa graniczna

Zjawiska oderwania oraz przepływu wstecznego należą do najbardziej złożonych zjawisk makroskalowych w otaczającym nas naturalnym środowisku. Mimo, iż zjawiska te były już przedmiotem zainteresowania Leonarda da Vinci (XVI), ich wyjaśnienie stało się obiektem systematycznych badań dopiero w XX wieku.



Rys. 1. Rysunek Leonarda da Vinci przedstawiający oderwanie i przepływ wsteczny w obszarze gwałtownego rozszerzenia rury

Zjawiska oderwania oraz wstecznego ruchu płynu nie występują w przepływach swobodnych, a ich obecność związana jest z istnieniem sztywnych ścianek ograniczających obszar przepływu płynu. W istocie powstawanie przepływu wstecznego jest konsekwencją oderwania warstwy granicznej. Stanowi ona obszar

ruchu płynu w pobliżu sztywnych ścianek, w którym lepkość płynu i kształt ścianek wpływają decydująco na obraz przepływu. Ruch płynu w warstwie granicznej jest silnie wirowy i ma charakter przepływu lepkiego. Natomiast poza obszarem warstwy granicznej, tj. w przepływie zasadniczym, wirowość płynu jest tak niewielka, że można ją pominąć, z zatem przepływ taki traktować można jako potencjalny.

Ruch potencjalny jest charakterystyczny dla przepływu płynu idealnego, w którym nie występują naprężenia ścinające, a lepkość równa jest z definicji zeru. Cały obszar ruchu płynu możemy zatem podzielić na dwie zasadnicze strefy: przepływ główny zwany też zasadniczym, odbywający się w oddaleniu od ścianek oraz warstwę graniczną występującą w ich sąsiedztwie. W warstwie granicznej ruch płynu ma charakter silnie wirowego przepływu lepkiego, natomiast w przepływie zasadniczym idealnego ruchu potencjalnego.

Przedstawiona tu w zarysie koncepcja warstwy granicznej została sformułowana po raz pierwszy przez Prandtla w 1904 roku na światowym Kongresie Matematycznym w Heidelbergu. Jej zasadniczym celem było rozwiązanie paradoksu występującego w równaniach hydrodynamiki: Ruch płynu daleko od ścianek opisywany był dobrze równaniami ruchu płynu idealnego (równaniem Eulera), natomiast rozwiązania tych równań nie spełniały na sztywnej ściance warunków brzegowych polegających na zerowaniu się zarówno składowej normalnej u jak i stycznej v wektora prędkości.

Równanie ruchu płynu w warstwie granicznej uzyskane przez Prandtla (1904) w wyniku uproszczenia równania Naviera-Stokesa przyjmuje następującą postać:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, a μ jego lepkością. Oś x układu współrzędnych przyjmuje się styczną do ścianki i równoległą do zasadniczego kierunku przepływu, natomiast oś y prostopadłą do ścianki i skierowaną w głąb płynu. Ponieważ wariacja ciśnienia w warstwie granicznej w kierunku y jest pomijalnie mała, a dla danego x samo ciśnienie P jest w zasadzie zgodne z ciśnieniem w przepływie zasadniczym, występujący w równaniu (1) gradient ciśnienia wyrazić można przy pomocy prędkości przepływu zasadniczego U , traktowanego jako ruch płynu idealnego, korzystając z równania Eulera lub równania Bernoulliego:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

Podstawiając równ. (2) do równ. (1) otrzymuje się:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

Prędkość przepływu zasadniczego U traktuje się zwykle jako zadaną a priori. Jako drugie równanie, sprzężone z (1) lub (3) przyjmuje się równanie ciągłości przepływu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Dwa sprzężone równania (1), (4) lub (3), (4) stanowią tzw. układ równań Prandtla opisujący ruch płynu w warstwie granicznej. Warunki brzegowe dla wspomnianego układu dotyczą zerowania się składowych prędkości na ściance:

$$u(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (5)$$

$$v(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (6)$$

Warunki te uzupełniane są tzw. warunkiem zgodności:

$$u(x, y)|_{y \rightarrow \infty} = U(x) \quad (7)$$

Warunek ten oznacza, że prędkość płynu w warstwie granicznej osiąga asymptotycznie wartość właściwą dla przepływu zasadniczego w miarę oddalania się od ścianki.



Rys. 2. Rysunek Leonarda da Vinci przedstawiający oderwanie i przepływ wsteczny

2. Regularna warstwa graniczna

Dla zagadnienia przepływu w warstwie granicznej wokół cienkiej płyty opływanej przez równoległy do jej powierzchni jednorodny strumień płynu, tj. taki dla którego $U(x) = \text{const.}$, układ równań Prandtla rozwiązany został przez Blasiusa (1908). Wprowadzając nową zmienną

$$\eta = \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} y \tag{8}$$

Blasius uzyskał rozwiązanie zagadnienia w postaci:

$$u = U B_L(\eta) = U B_L\left(\sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} y\right) \tag{9}$$

gdzie

$$B_L(\eta) = \frac{df_B(\eta)}{d\eta} \tag{10}$$

a funkcja $f_B(\eta)$ spełnia tzw. równanie różniczkowe Blasiusa

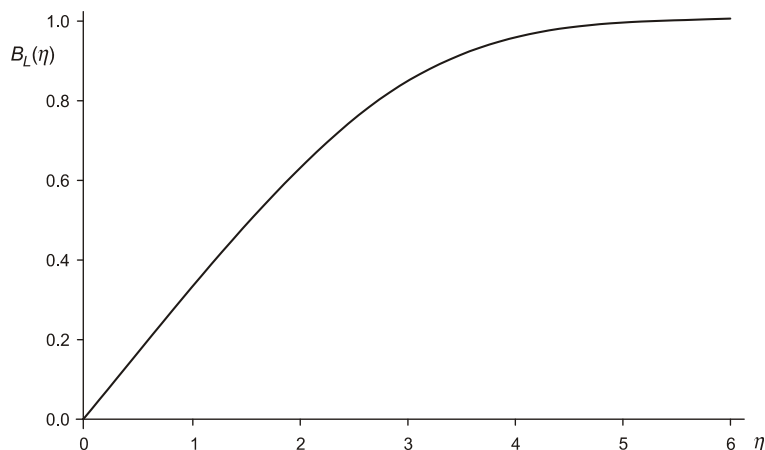
$$\frac{d^3 f_B(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_B(\eta) \frac{d^2 f_B(\eta)}{d\eta^2} = 0 \tag{11}$$

z warunkami brzegowymi:

$$f_B(\eta)|_{\eta=0} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial f_B(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial f_B(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \tag{14}$$

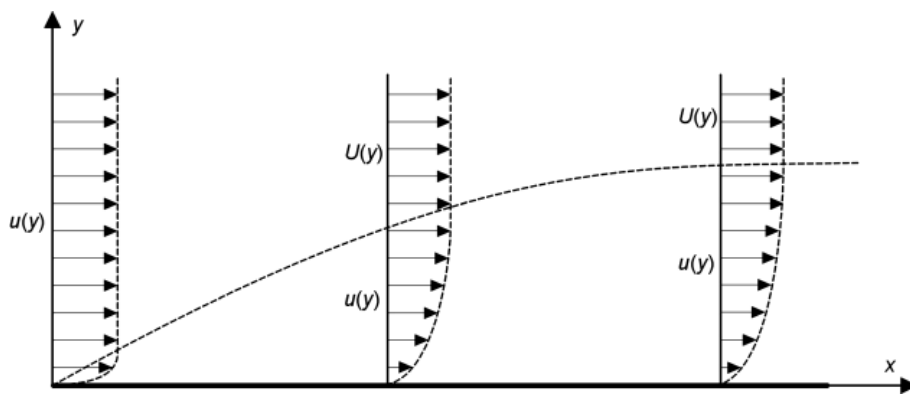
Rys. 3. Wykres funkcji $B_L(\eta)$

Blasius podał rozwiązanie przybliżone zagadnienia brzegowego (11) – (14) przy pomocy rozwinięć w szeregi. Obecnie zagadnienie to rozwiązuje się bardzo efektywnie metodami numerycznymi. Ponieważ funkcje $f_B(\eta)$ oraz $B_L(\eta)$ są monotonicznie rosnącymi funkcjami regularnymi, w rozwiązaniach nie napotyka się żadnych osobliwości. Wykres funkcji $B_L(\eta)$ pokazano na Rys. 3.

Równoległy opływ płyty ma więc charakter regularny, a grubość warstwy granicznej δ narasta stopniowo z odległością x od początku płyty zgodnie ze wzorem (Schlichting, 1965):

$$\delta = C \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} \quad (15)$$

gdzie C jest wielkością stałą zależną od arbitralnie przyjętego zewnętrznego brzegu warstwy granicznej. Jeśli za brzeg ten przyjmiemy odległość od ścianki, dla której składowa prędkości u styczna do ścianki równa jest 95% prędkości w przepływie zasadniczym wówczas za C należy przyjąć wartość 3.91804, jeśli u równa jest 99% prędkości w przepływie zasadniczym wówczas za C należy przyjąć wartość 4.0999, jeśli u równa jest 99.9% prędkości w przepływie zasadniczym wówczas za C należy przyjąć wartość 6.0.



Rys. 4. Obraz stopniowego narastania regularnej warstwy granicznej Blasiusa przy równoległym opływie płaskiej płyty

Rozwiązanie Blasiusa opisuje regularną warstwę graniczną, w której nie zachodzą żadne osobliwości. Podobny obraz stopniowego narastania regularnej warstwy granicznej obserwuje się w początkowym obszarze gładkiej rury, przy wpływie do niej płynu z dużego zbiornika.

3. Generacja oderwania warstwy granicznej

Spróbujmy teraz przeanalizować przepływ w warstwie granicznej w warunkach bardziej skomplikowanych niż wzdłuż płaskiej płyty. Przypadek rozważony przez Blasiusa można uogólnić na sytuację, gdy napływający potencjalny stumień w przepływie zasadniczym opisany jest odwzorowaniem konforemnym wyrażonym następującą funkcją zespoloną:

$$F(z) = z^m = (x + yi)^m \quad (16)$$

Odpowiada to składowej stycznej napływającego strumienia w postaci:

$$U(x) = cx^m \quad (17)$$

Analizę przepływu przeprowadzimy wprowadzając funkcją prądu Ψ , której pochodne przestrzenne są składowymi wektora prędkości:

$$u = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} \quad (18)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} \quad (19)$$

Podstawienie reprezentacji (17), (18), (19) do równania (3) daje:

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial y^2} = c^2 m x^{2m-1} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 \Psi(x,y)}{\partial y^3} \quad (20)$$

Warunki brzegowe dla powyższego równania będą jak następuje:

$$\left. \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} \right|_{y=0} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \infty} = U(x) = cx^m \quad (23)$$

W celu rozwiązania zagadnienia brzegowego (20) – (23) wprowadźmy nowe zmienne niezależne zdefiniowane w sposób:

$$\xi \stackrel{\text{df}}{=} \frac{x}{L} \quad (24)$$

$$\eta \stackrel{\text{df}}{=} \frac{y}{G(x)} \frac{\sqrt{\text{Re}}}{L} \quad (25)$$

gdzie Re jest liczbą Reynoldsa, L parametrem o wymiarze długości, a $G(x)$ pewną funkcją, którą postaramy się wyznaczyć później. Rozwiązania poszukiwać będziemy wówczas postaci (Falkner, Skan, 1930, 1931):

$$\Psi = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} U(x) G(x) f(\xi, \eta) \quad (26)$$

Będziemy wówczas mieć:

$$u = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \left(\eta \frac{LG(x)}{\sqrt{\text{Re}}} \right)} \left\{ \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} U(x) G(x) f(\xi, \eta) \right\} = U \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} v = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = & -\frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \left[f(\xi, \eta) \frac{d}{dx} \{U(x) G(x)\} + U(x) G(x) \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left[L f(\xi, \eta) \frac{d}{dx} \{U(x) G(x)\} + U(x) G(x) \left\{ \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} - L \frac{G'(x)}{G(x)} \eta \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Podstawiając wyrażenia (24) – (28) do równania (20) otrzymamy następujące równanie dla funkcji $f(\xi, \eta)$ (Falkner, Skan, 1930, 1931):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \left\{ \frac{L}{U_s} G(x) \frac{d}{dx} (U(x) G(x)) \right\} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ + \left\{ \frac{L}{U_s} G^2(x) \frac{dU(x)}{dx} \right\} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{U(x)}{U_s} G^2(x) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Jeśli wyrażenia w nawiasach klamrowych są stałe, tj.

$$G(x) \frac{d}{dx} \{U(x) G(x)\} = a = \text{const} \quad (30)$$

$$G^2(x) \frac{dU(x)}{dx} = b = \text{const} \quad (31)$$

a f jest niezależne od ξ , to równanie dla funkcji $f(\eta)$ upraszcza się do postaci:

$$\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + a f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + b \left[1 - \left\{ \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right\}^2 \right] = 0 \quad (32)$$

Jeśli funkcja $f(\eta)$ zostanie wyznaczona z równania (32), wówczas rozwiązanie problemu dane jest w formie:

$$\Psi = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} U(x) G(x) f(\eta) \quad (33)$$

Z układu równań (30), (31) możemy wyznaczyć szczegółową postać funkcji $U(x)$ i $G(x)$, dla których rozwiązanie problemu ma postać (33). Okazuje się, że jedynymi rozwiązaniami są:

$$U(x) = \text{const} \quad (34)$$

$$G(x) = \sqrt{2 \frac{aU\#}{LU} x + C} \quad (35)$$

lub

$$U(x) = cx \quad (36)$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{U_s b}{Lc}} = \text{const} \quad (37)$$

lub

$$U(x) = cx^m \quad (38)$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{U_s b}{Lc}} x^{(1-m)/2} \quad (39)$$

$$m = \frac{b}{2a - b} \quad (40)$$

lub

$$U(x) = c \exp(\lambda^2 x), \quad a = b \quad (41)$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{U_s b}{Lc\lambda}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} x\right), \quad a = b \quad (42)$$

Pierwszy przypadek odpowiada opływowi równolegle ustawionej płyty omówionemu w rozdziale poprzednim, drugi przypadek odpowiada przepływowi wokół punktu stagnacji, natomiast trzeci przypadek odpowiada napływowi na nachyloną płytę lub spływowi z niej.

Rozważymy bardziej szczegółowo przypadek trzeci. W celu wyeliminowania jednego z parametrów parametrów a lub b z równ. (32) rozważmy ponownie zagadnienie brzegowe (20) – (23) i wprowadźmy nowe zmienne niezależne zdefiniowane w sposób:

$$\xi \stackrel{\text{df}}{=} x \quad (43)$$

$$\eta \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\frac{c\rho}{\mu}} x^{m-1} y \quad (44)$$

Rozwiązania poszukiwać będziemy wówczas postaci:

$$\Psi \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\frac{c\mu}{\rho}} x^{m+1} f_s(\xi, \eta) \quad (45)$$

Podstawiając wyrażenia (43), (44), (45) do równania (20) otrzymamy następujące równanie dla funkcji $f_s(\eta)$ niezależnej od zmiennej ξ (Falkner, Skan, 1930, 1931; Howarth, 1959):

$$\frac{d^3 f_s(\eta)}{d\eta^3} + \frac{m+1}{2} f_s(\eta) \frac{d^2 f_s(\eta)}{d\eta^2} + m \left[1 - \left\{ \frac{\partial f_s(\eta)}{\partial \eta} \right\}^2 \right] = 0 \quad (46)$$

Wprowadzając nowe zmienne zdefiniowane w sposób

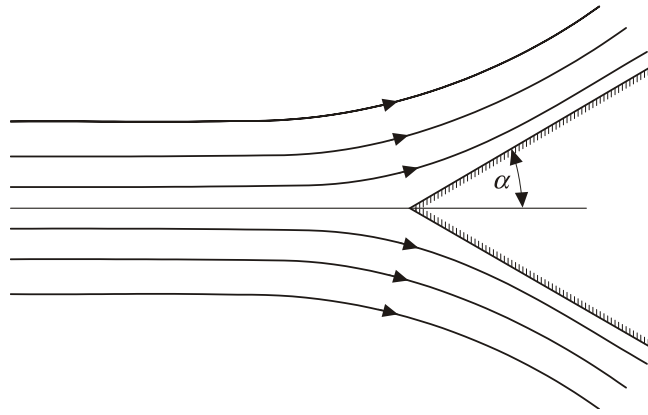
$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (47)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \eta \quad (48)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{m+1}{2}} f_s \quad (49)$$

możemy przedstawić równanie (46) w następującej równoważnej postaci:

$$\frac{d^3 \Phi(\sigma)}{d\sigma^3} + \Phi(\eta) \frac{d^2 \Phi(\sigma)}{d\sigma^2} + \beta \left[1 - \left\{ \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}^2 \right] = 0 \quad (50)$$

Rys. 5. Obraz napływu na klin o kącie rozwarcia 2α

Warunki brzegowe dla powyższego równania są jak następuje:

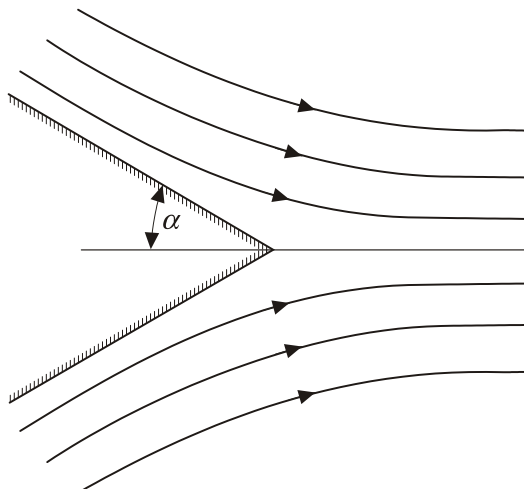
$$\Phi(\sigma)\Big|_{\sigma=0} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial\Phi(\sigma)}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial\Phi(\sigma)}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma\rightarrow\infty} = 1 \quad (53)$$

Równanie (46) lub alternatywnie równanie (50) zwane też równaniem FS obejmuje szereg przypadków szczególnych. Sytuacja, gdy $\beta = 0$, tj. $m = 0$ odpowiada przepływowi Blasiusa wokół płaskiej płyty, ustawionej równolegle do jednorodnego strumienia płynu. Warunek $\beta = 1$, tj. $m = 1$ odpowiada przepływowi wokół punktu stagnacji. Przypadek $0 \leq \beta \leq 2$, tj. $m \geq 0$ odpowiada napływowi na klin o kącie rozwarcia $2\alpha = \pi\beta$ (Rys. 5). Sytuacja, gdy $\beta = +\infty$, tj. $m = -1$ odpowiada przepływowi Hamela w konfuzorze, tj. radialnemu przepływowi między dwoma wzajemnie nachylonymi płytami w sytuacji, gdy wypływ lub dopływ płynu następuje z krawędzi przecinających się płyt. Przypadek $-2 \leq \beta \leq 0$, tj. $-1/2 \leq m \leq 0$ odpowiada spływowi z klina o kącie rozwarcia $2\alpha = \pi\beta$ (Rys. 6).

Generalnie, przypadki, dla których $\beta > 0$, tj. $m > 0$ odpowiadają przepływowi akceleracyjnemu, natomiast przypadki, dla których $\beta < 0$, tj. $m < 0$ odpowiadają przepływowi deceleracyjnemu.

Rys. 6. Obraz spływu z klina o kącie rozwarcia 2α

Dla $\beta > 0$, tj. dla przepływu akceleracyjnego zagadnienie brzegowe (50) – (53) posiada rozwiązania regularne wskazujące na regularny charakter przepływu w warstwie granicznej. Rzeczywiście, badania doświadczalne przeprowadzone w wielu laboratoriach potwierdziły, że w strefie nadwierznej opływu ciała stałego, gdzie występuje przepływ akceleracyjny, ruch płynu ma charakter regularny, bez żadnych osobliwości.

W przedziale $0 \leq \beta \leq 1$ rozwiązanie zagadnienia (50) – (53) jest jednoznaczne. Dla $\beta > 1$ sytuacja komplikuje się trochę: oprócz rozwiązania regularnego istnieją rozwiązania periodyczne (Howarth, 1959). Dla przedziału $1 < \beta < 2$ istnieje jedno dodatkowe rozwiązanie periodyczne, natomiast poczynając od $\beta = 2$ istnieje nieskończony zbiór rozwiązań periodycznych. Wszystkie te dodatkowe rozwiązania mają charakter czysto formalny i nie opisują żadnego rzeczywistego przepływu płynu. Ich obecność może jednak budzić niepokój i stanowi jedynie zapowiedź złożoności zachowań rozwiązania zagadnienia brzegowego dla $\beta < 0$.

Dla przepływu deceleracyjnego, tj. dla $\beta < 0$ zagadnienie brzegowe (50) – (53) cechują liczne osobliwości (Howarth, 1959). Nie występuje tutaj jednoznaczność rozwiązania, a zamiast tego istnieją całe rodziny konkurencyjnych rozwiązań. Ich postać jest rozmaita, niekiedy nader złożona. Jedynie nieliczne z rozwiązań posiadają znaczenie fizyczne i opisują realny ruch płynu. Rozwiązania opisujące przepływ rzeczywisty istnieją jedynie dla β nie mniejszych od wartości krytycznej:

$$\beta_{\#} \cong -1.988376 \quad (54)$$

Wartość ta stanowi punkt bifurkacji rozwiązań. Dla wartości $\beta < \beta_{\#}$ istnieją wprawdzie rozwiązania równania (50), nie spełniają one jednak warunków brzegowych (51), (52), (53). Takie rozwiązania uznać należy za ‘nieakceptowalne’, gdyż nie opisują one żadnego ruchu płynu.

Wieloznaczność rozwiązań oraz występowanie osobliwości w przypadku przepływu deceleracyjnego, tj. dla $\beta < 0$, wskazuje na istnienie rzeczywistych osobliwości w obszarze przepływu płynu. Osobliwości te odpowiadają powstawaniu punktów oderwania, w których warstwa graniczna odrywa się od powierzchni ciała stałego. Powstała w ten sposób linia lub powierzchnia oderwania stanowi linię lub powierzchnię osobliwą dla rozwiązań równań Prandtla.

Z matematycznego punktu widzenia oderwanie warstwy granicznej jest więc konsekwencją istnienia osobliwości rozwiązań równań Prandtla opisujących jej zachowanie w obszarze deceleracyjnym, podobnie jak powstawanie turbulencji jest konsekwencją niestateczności i bifurkacji rozwiązań równań Naviera-Stokesa.

4. Powstawanie przepływu wstecznego

Ze względu na wieloznaczność oraz występowanie osobliwości rozwiązanie zagadnienia brzegowego (50) – (53), nawet przy pomocy metod numerycznych, stanowi poważne wyzwanie. Dobrze znana metoda Rungego-Kutty nie może być tutaj zastosowana, gdyż odnosi się ona do zagadnień początkowych a nie brzegowych.

Jednym ze sposobów rozwiązania jest wykorzystanie tzw. metody strzałów (ang. *shooting metod*). Jednakże bezpośrednie zastosowanie tej metody prowadzi zwykle do otrzymania jednego z licznych rozwiązań ‘nieakceptowalnych’, nie opisujących żadnego rzeczywistego ruchu płynu. Dlatego też potrzebne jest wprowadzenie dodatkowych warunków, aby otrzymać rozwiązania ‘akceptowalne’, tj. posiadające konkretny sens fizyczny.

Jednym z takich wymagań jest kontrola rotacji prędkości oraz jej zachowania w miarę oddalania się od sztywnej ścianki (Quartapelle, Scandroglio, 2006). Podane niżej rozwiązania uzyskane zostały przy pomocy tej metody.

Rys. 7 przedstawia uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla regularnej warstwy granicznej dla parametru $\beta = 10$, tj. dla przepływu akceleracyjnego. Na rysunku pokazano przebieg zależności bezwymiarowej funkcji prądu (linia kropkowana), bezwymiarowej prędkości (linia ciągła) oraz bezwymiarowej rotacji prędkości (linia przerywana) w zależności od wartości znormalizowanej zmiennej η .

Rys. 8 przedstawia ‘nieakceptowalne’ rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej dla parametru $\beta = -0.05$, tj. dla przepływu deceleracyjnego. Na rysunku pokazano przebieg zależności bezwymiarowej funkcji prądu (linia kropkowana), bezwymiarowej prędkości (linia ciągła) oraz bezwymiarowej rotacji prędkości (linia przerywana) w zależności od wartości znormalizowanej zmiennej η .

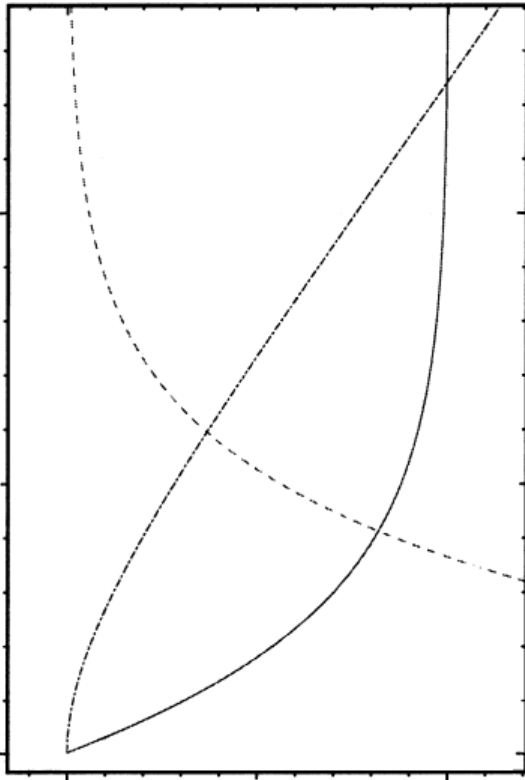


Fig. 7. Uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla regularnej warstwy granicznej dla $\beta = 10$ (tj. dla przepływu akceleracyjnego), (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

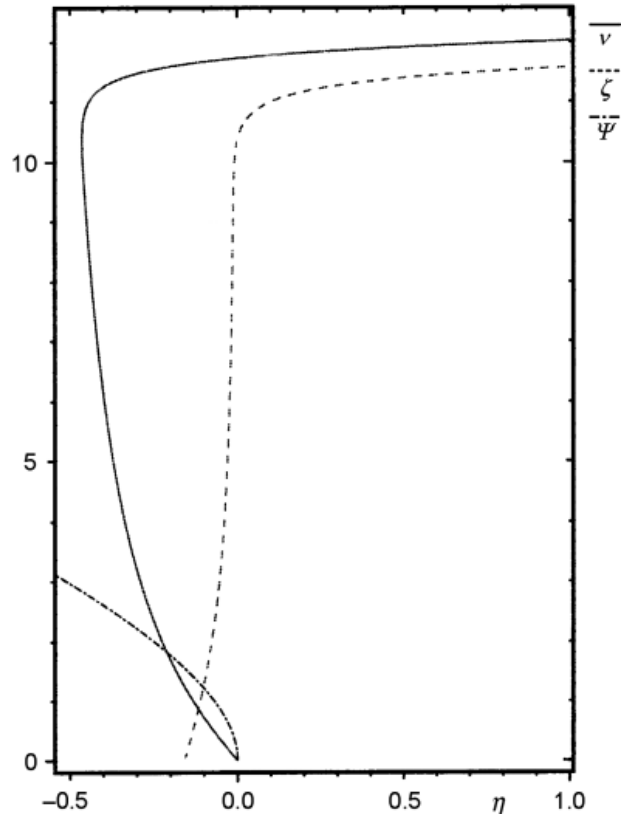


Fig. 8. 'Nieakceptowalne' rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej dla $\beta = -0.05$ (tj. dla przepływu deceleracyjnego), (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

Rys. 9 przedstawia uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalne' rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej przy wartości parametru $\beta = -0.12$, tj. dla przepływu deceleracyjnego. Na rysunku pokazano przebieg zależności bezwymiarowej funkcji prądu (linia kropkowana), bezwymiarowej prędkości (linia ciągła) oraz bezwymiarowej rotacji prędkości (linia przerywana) w zależności od wartości znormalizowanej zmiennej η .

Rys. 10 przedstawia uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalne' rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej w warunkach zarówno przepływu akceleracyjnego jak i deceleracyjnego. Na rysunku pokazano odpowiadającą różnym, dodatnim i ujemnym wartościom parametru β rodzinę krzywych wyrażających przebieg zależności bezwymiarowej funkcji prądu od znormalizowanej zmiennej η .

Rys. 11 przedstawia uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalne' rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej w warunkach zarówno przepływu zarówno akceleracyjnego jak i deceleracyjnego. Na rysunku pokazano odpowiadającą różnym, dodatnim i ujemnym wartościom parametru β rodzinę krzywych wyrażających przebieg zależności bezwymiarowej prędkości od znormalizowanej zmiennej η .

Przedstawiony poniżej Rys. 12 pokazuje uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalne' rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej w warunkach zarówno przepływu akceleracyjnego jak i deceleracyjnego. Na rysunku pokazano odpowiadającą różnym, dodatnim i ujemnym wartościom parametru β rodzinę krzywych wyrażających przebieg zależności bezwymiarowej rotacji prędkości od znormalizowanej zmiennej η . Widać wyraźnie, że niezależnie od wartości parametru β wielkość rotacji prędkości jest ograniczona i zanika ona dla większych wartości zmiennej η , co odpowiada warunkowi zgodności wyrażającemu stopniowe przechodzenie brzegu warstwy granicznej w obszar przepływu zasadniczego.

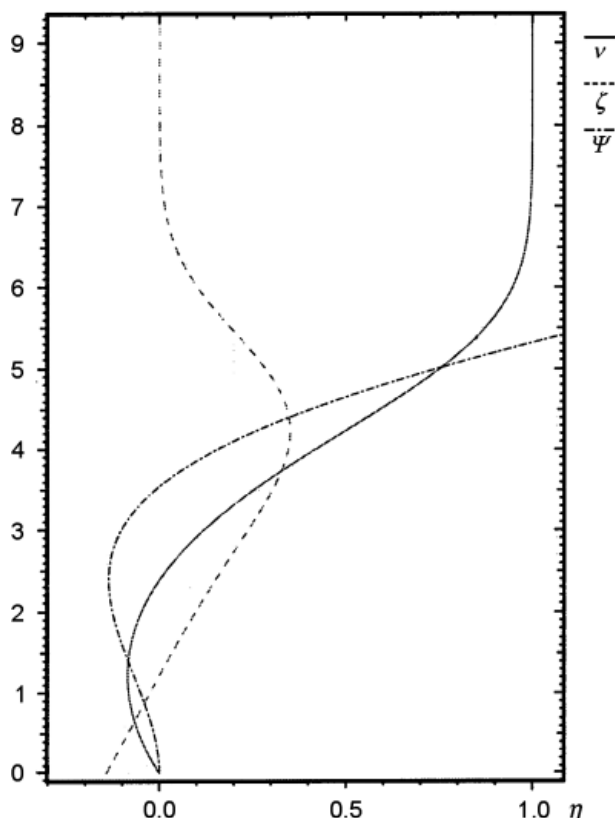


Fig. 9. Uzyskane zmodyfikowaną metodą strzałów ‘akceptowalne’ rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego (50) – (53) dla warstwy granicznej dla $\beta = -0.12$ (tj. dla przepływu deceleracyjnego), (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

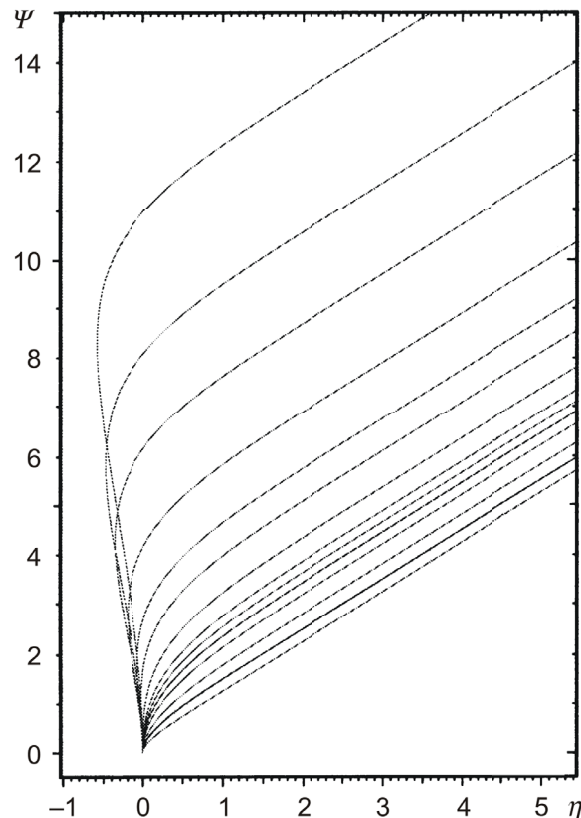


Fig. 10. Uzyskana zmodyfikowaną metodą strzałów ‘akceptowalna’ rodzina krzywych zależności bezwymiarowej funkcji prądu od znormalizowanej zmiennej η dla, idąc od dołu, kolejnych, malejących wartości parametru $\beta = 10, 2, 0.5, 0, -0.1, -0.15, -0.18$, dla przepływu regularnego, oraz dla kolejnych wartości parametru $\beta = -0.18, -0.15, -0.1, -0.05, -0.025, -0.01$ dla przepływu odwróconego (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

Na rysunkach 10 i 11 widać wyraźnie, że krzywe funkcji prądu i prędkości odnoszące się do przepływu regularnego określone są jedynie dla dodatnich wartości znormalizowanej zmiennej η . Oznacza to, że kierunek stycznego do sztywnej ścianki przepływu w warstwie granicznej jest zgodny z kierunkiem napływającego z zewnątrz strumienia płynu. Natomiast sytuacja, w której krzywe funkcji prądu i prędkości posiadają ‘wybrzuszenie’ i określone są również dla ujemnych wartości znormalizowanej zmiennej η oznaczają pojawianie się w warstwie granicznej przepływu odwróconego, w którym kierunek stycznego do sztywnej ścianki przepływu w warstwie granicznej jest przeciwny do kierunku napływającego z zewnątrz strumienia płynu. Z fizykalnego punktu widzenia linia stanowiąca odpowiednik pierwszego pojawiającego się wybrzuszenia jest linią oderwania warstwy granicznej.

Taka sytuacja może się wydarzyć jedynie wtedy, gdy pojawi się linia osobliwa, która oddziela obszar przepływu regularnego zgodnego z napływającym strumieniem od obszaru wstecznego, o kierunku ruchu przeciwnym do napływającego strumienia. Potwierdza to wniosek przedstawiony już uprzednio, zgodnie z którym z matematycznego punktu widzenia oderwanie warstwy granicznej jest konsekwencją istnienia linii osobliwej w obszarze akceptowalnych rozwiązań równań Prandtla.

Należy zaznaczyć, że oderwanie warstwy granicznej nie występuje od strony nadwierznej opływanych ciał. Ruch płynu ma tam charakter przepływu akceleracyjnego, co odpowiada dodatnim wartościom parametru β , dla których akceptowalne rozwiązania równania FS są zawsze regularne. Oderwanie wystąpić może natomiast od strony zawietrznej, gdyż ruch płynu ma tam charakter przepływu deceleracyjnego, co odpowiada ujemnym wartościom parametru β , dla których akceptowalne rozwiązania równania FS są często osobliwe.

Sytuacja taka odpowiada dobrze znanemu z literatury obrazowi oderwania warstwy granicznej pokazanemu na Rys. 13.

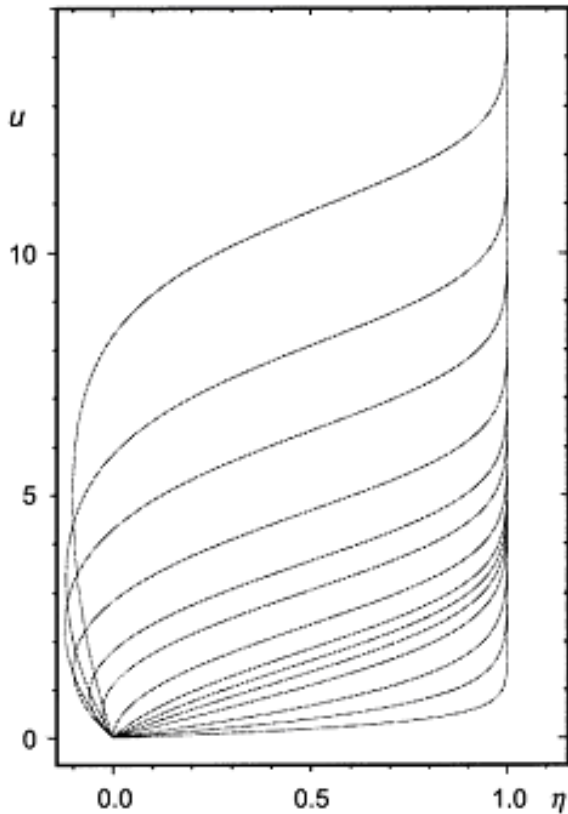


Fig. 11. Uzyskana zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalna' rodzina krzywych zależności bezwymiarowej prędkości od znormalizowanej zmiennej η dla, idąc od dołu, kolejnych, malejących wartości parametru $\beta = 10, 2, 0.5, 0, -0.1, -0.15, -0.18$, dla przepływu regularnego, oraz dla kolejnych wartości parametru $\beta = -0.18, -0.15, -0.1, -0.05, -0.025, -0.01$ dla przepływu odwróconego (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

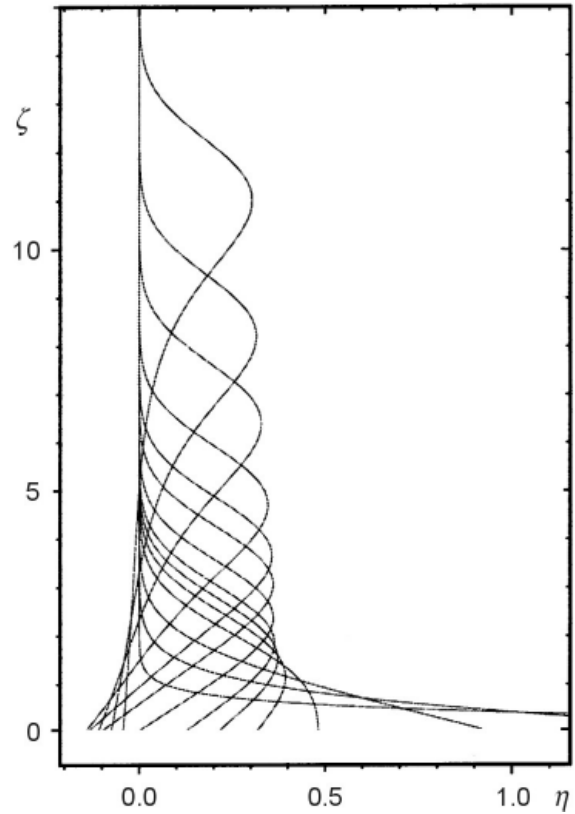


Fig. 12. Uzyskana zmodyfikowaną metodą strzałów 'akceptowalna' rodzina krzywych zależności bezwymiarowej rotacji prędkości od znormalizowanej zmiennej η dla, idąc od dołu, kolejnych, malejących wartości parametru $\beta = 10, 2, 0.5, 0, -0.1, -0.15, -0.18$, dla przepływu regularnego, oraz dla kolejnych wartości parametru $\beta = -0.18, -0.15, -0.1, -0.05, -0.025, -0.01$ dla przepływu odwróconego (wg Quartapelle i Scandroglio, 2006)

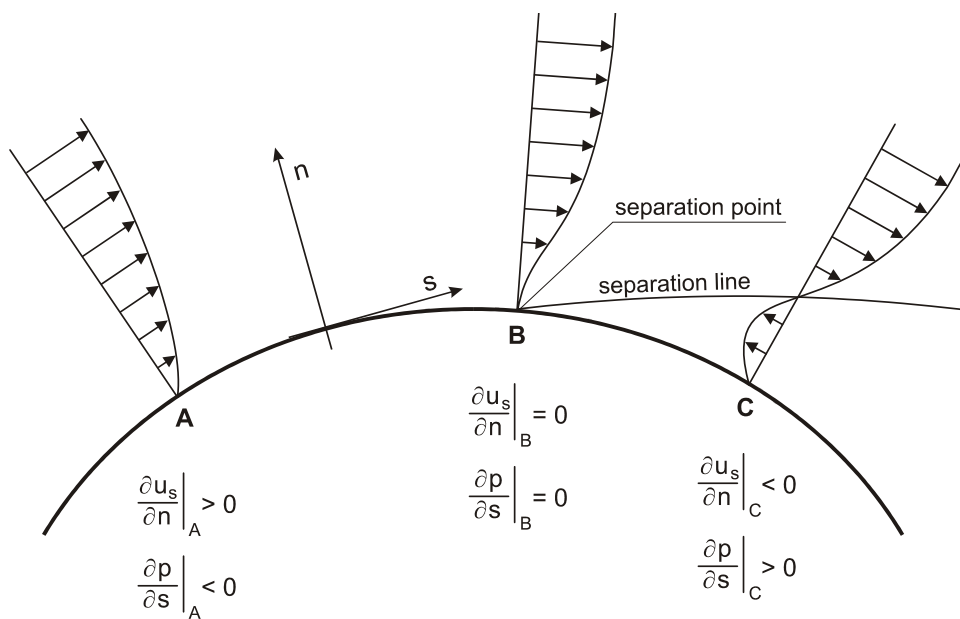


Fig. 13. Obraz oderwania warstwy granicznej na gładkiej powierzchni

Na przedstawionym powyżej Rys. 13 widać wyraźnie, że w obszarze regularnym warstwy granicznej (jeszcze przed oderwaniem) składowa prędkości stycznej do powierzchni ciała stałego wzrasta monotonicznie w głąb płynu w kierunku normalnym do powierzchni, natomiast ciśnienie spada wzdłuż stycznej do powierzchni, zgodnie z kierunkiem przepływu.

W punkcie separacji pochodna prędkości stycznej do powierzchni ciała stałego względem kierunku normalnego do powierzchni jest równa zero, natomiast składowa normalna do powierzchni 'eksploduje', osiągając w tym miejscu bardzo duże wartości. W punkcie separacji ciśnienie osiąga wartość minimalną, stąd też jego pochodna względem kierunku stycznego do powierzchni przyjmuje wartość równą zero.

W obszarze oderwania składowa prędkości styczna do powierzchni ciała stałego wzrasta początkowo w głąb płynu w kierunku normalnym do powierzchni, lecz kierunek ruchu w warstwie granicznej jest przeciwny do kierunku zasadniczego strumienia płynu. Prędkość ta osiąga ujemną wartość maksymalną (tj. wartość minimalną), po czym zaczyna spadać co do bezwzględnej wartości osiągając wkrótce wartość

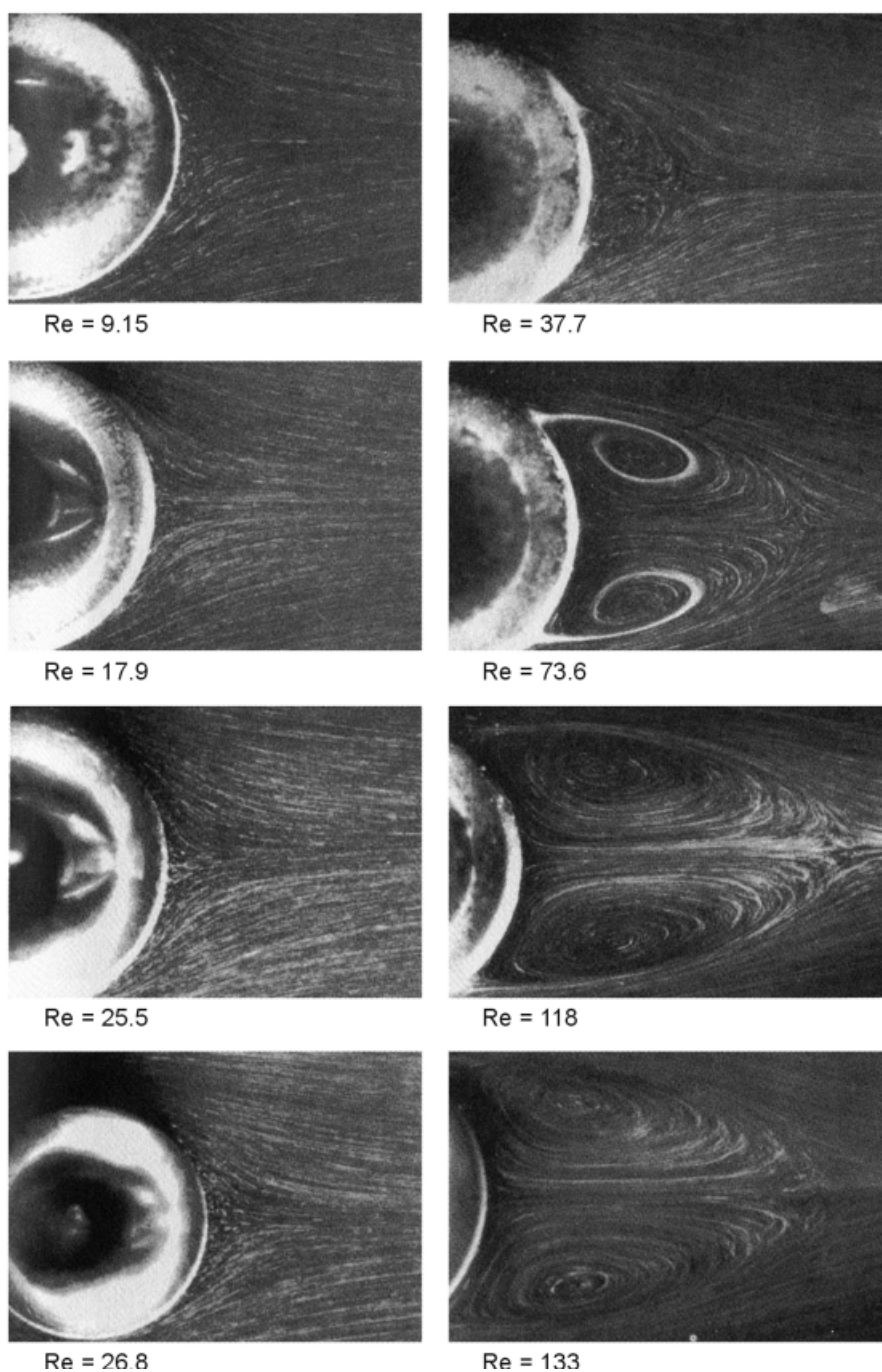


Fig. 14. Obrazy stacjonarnego opływu sfery dla rozmaitych wartości liczb Reynoldsa (wg Tanedy, 1956)

zero. Sytuacja taka odpowiada ‘podpływaniu’ płynu wzdłuż ścianki w kierunku przeciwnym do strumienia zasadniczego. Po przekroczeniu wartości zerowej prędkość dalej wzrasta, już teraz zgodnie z kierunkiem zasadniczego strumienia płynu, aż do umownego brzegu warstwy granicznej, w którym osiąga 99% (lub np. 99.9 %) wartości prędkości przepływu głównego. Ponieważ spadek ciśnienia jest zawsze zgodny z kierunkiem przepływu, pochodna ciśnienia względem kierunku stycznego do ścianki jest w obszarze oderwania warstwy granicznej dodatnia.

Pozostaje jedynie wyjaśnić przyczynę występowania zjawisk oderwania warstwy granicznej i powstawania przepływu recyrkulacyjnego z fizykalnego punktu widzenia.

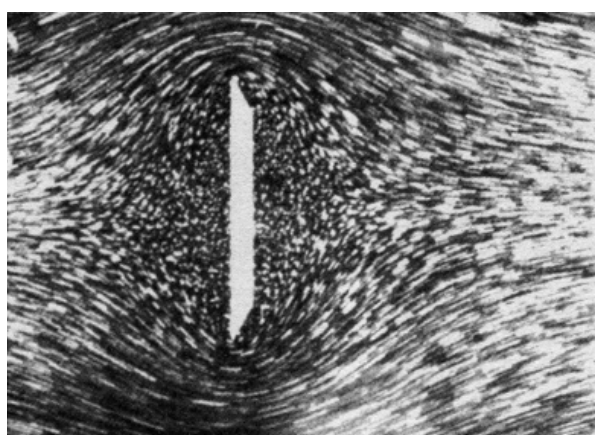
W starszej literaturze można znaleźć opinię, że przyczyną oderwania warstwy granicznej jest nadmiar sił bezwładności w przepływającym płynie w stosunku do występujących tam sił tarcia wewnętrznego związanych z istnieniem lepkości. Taki pogląd sugerować mogą wyniki doświadczalne uzyskane podczas opływu sfery lub cylindra przez jednorodny strumień płynu (Rys. 14).

Dla małych liczb Reynoldsa Re przepływ pozostaje regularny nawet od strony zawietrznej. Jednakże poczynając od wartości Re równej kilkudziesięciu, od strony zawietrznej pojawia się oderwanie warstwy granicznej i zaczyna się tworzyć niewielki obszar recyrkulacyjny. Obszar ten ulega stopniowemu powiększeniu ze wzrostem liczby Reynoldsa Re .

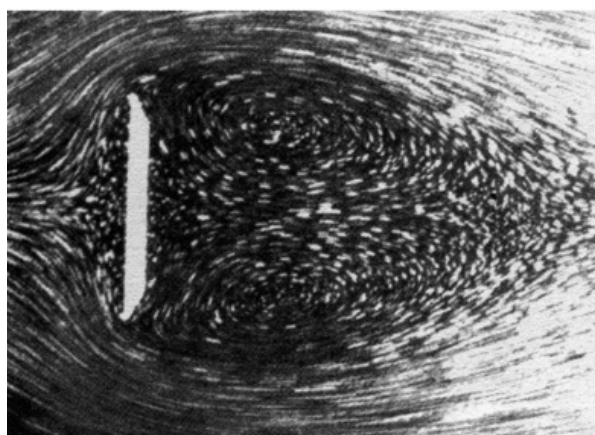
Przedstawione tutaj ‘klasyczne’ wyjaśnienie zawodzi jednak w przypadku opływu brył ostrokrawędzistych, dla których oderwanie występuje zawsze na ostrej krawędzi, niezależnie od wartości Re (Rys. 15).

Wydaje się, że prawidłowe wyjaśnienie fizykalnej przyczyny zjawiska oderwania warstwy granicznej przedstawił Batchelor (1967, 1985), ujmując to w następujące słowa:

“The separation phenomenon is implied by the situation in which a thin boundary layer adjoining a solid boundary is unable to reduce appreciably in the velocity of mainflow stream in the regular manner. The reduction of external velocity occurs then by means of special methods as the separation of boundary layer and creation of systems of eddies. When the significant reduction in velocity of the external stream



$Re = 0.25$



$Re = 10$

Fig. 15. Obrazy stacjonarnego opływu dysku prostopadłego do napływającego strumienia dla rozmaitych wartości liczb Reynoldsa

is appreciable, the transfer of vorticity from direct neighbourhood of a solid wall is often so rapid that the transfer of vorticity is not confined to the vicinity of the wall. Consequently, the surplus of vorticity is propagated then in a large zone away a solid body. Since the mainflow is almost irrotational and non-zero vorticity occurs in the boundary layer only therefore the large zone mentioned above should be regarded as a subzone of the boundary layer."

Tak więc nadmiar niezbędnej do przyklejenia płynu do ścianki, a zarazem nie dającej się opanować wirowości, a nie bezwładność płynu jest przyczyną oderwania warstwy granicznej i powstawania przepływów wstecznych, także obszarów recyrkulacyjnych.

5. Analiza ruchu płynu w sąsiedztwie punktu oderwania

Analiza ruchu płynu w sąsiedztwie punktu oderwania jest problemem złożonym. Ponieważ w warstwie granicznej składowa styczna prędkości u jest dużo większa od składowej normalnej v , dlatego też w punkcie oderwania $x_{\#}$ wartość v musi 'ekspłodować', a wartość pochodnej $\partial v / \partial y$ musi być również ekstremalnie duża.

Spróbujmy przebadac, jak zachowują się rozwiązania równań Prandtla przed punktem oderwania $x_{\#}$ oraz za nim. Wprowadzając wskaźnik \perp jako odnoszący do dowolnej wielkości 'przed oderwaniem' oraz oznaczając prędkość prędkość w przepływie zasadniczym odpowiadającą punktowi oderwania przez $U_{\#}$ a jej pochodną przez $U'_{\#}$ wprowadźmy definicje następujących parametrów bezwymiarowych:

Bezwymiarowa skala odległości:

$$L \stackrel{\text{df}}{=} \frac{U_{\#}}{U'_{\#}} \quad (55)$$

Punktowa liczba Reynoldsa:

$$\text{Re}_{\#} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\rho L U_{\#}}{\mu} \quad (56)$$

Bezwymiarowa odległość od punktu oderwania wzdłuż ścianki:

$$x_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{x_{\#} - x}{L} \quad (57)$$

Bezwymiarowa odległość od punktu oderwania w kierunku normalnym do ścianki:

$$y_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{\text{Re}_{\perp}}}{L} y \quad (58)$$

Bezwymiarowa składowa prędkości styczna do ścianki:

$$u_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u}{u_{\#}} \quad (59)$$

Bezwymiarowa składowa prędkości normalna do ścianki:

$$v_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\text{Re}_{\perp}} \frac{v}{v_{\#}} \quad (60)$$

Bezwymiarowa prędkość strumienia zasadniczego:

$$U_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{U}{U_{\#}} \quad (61)$$

Bezwymiarowa funkcja prądu:

$$\Psi_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{\text{Re}_{\perp}}}{U_{\perp} L} \Psi \quad (62)$$

Bezwymiarowe ciśnienie:

$$P_{\perp} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{P}{\rho U_{\perp}^2} \quad (63)$$

Równanie Prandtla (1) możemy wówczas zapisać w sposób:

$$-u_{\perp} \frac{\partial u_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + v_{\perp} \frac{\partial u_{\perp}}{\partial y_{\perp}} = \frac{\partial P_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial^2 u_{\perp}}{\partial y_{\perp}^2} \quad (64)$$

Wyrażając gradient ciśnienia poprzez prędkość w przepływie zasadniczym

$$\frac{\partial P_{\perp}}{\partial x_{\perp}} = -U_{\perp} \frac{\partial U_{\perp}}{\partial x_{\perp}} \quad (65)$$

oraz przedstawiając bezwymiarowe składowe u_{\perp} i v_{\perp} wektora prędkości w warstwie granicznej przy pomocy pochodnych bezwymiarowej funkcji prądu Ψ_{\perp}

$$u_{\perp} = \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \quad (66)$$

$$v_{\perp} = \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial x_{\perp}} \quad (67)$$

otrzymamy:

$$-\frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \frac{\partial^2 \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial x_{\perp} \partial y_{\perp}} + \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial x_{\perp}} \frac{\partial^2 \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}^2} = -U_{\perp} \frac{\partial U_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial^3 \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}^3} \quad (68)$$

Warunki brzegowe dla powyższego równania różniczkowego są jak następuje:

$$\Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp}) \Big|_{y_{\perp}=0} = 0 \quad (69)$$

$$u_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp}) \Big|_{y_{\perp}=0} = \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \Big|_{y_{\perp}=0} = 0 \quad (70)$$

$$u_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp}) \Big|_{y_{\perp} \rightarrow \infty} = \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \Big|_{y_{\perp} \rightarrow \infty} = U_{\perp} \quad (71)$$

Zauważmy, że bezwymiarowa odległość od punktu oderwania x_{\perp} przyjmuje wartości dodatnie przed punktem oderwania $x_{\#}$, a wartość x_{\perp} rośnie tym bardziej im jesteśmy dalej przed $x_{\#}$.

Nieznana funkcję wyrażającą zależność bezwymiarowej składowej stycznej prędkości u_{\perp} od bezwymiarowej odległości od ścianki y_{\perp} w kierunku prostopadłym do ścianki w punkcie oderwania $x_{\#}$ wyrazić możemy w postaci szeregu nieskończonego (Goldstein, 1948):

$$u_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp}) \Big|_{x_{\perp}=0} = \frac{\partial \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \Big|_{x_{\perp}=0} = a_2 y_{\perp}^2 + a_3 y_{\perp}^3 + a_4 y_{\perp}^4 + a_5 y_{\perp}^5 + \dots \quad (72)$$

Podobnie zrobić możemy z pochodną u_{\perp} względem y_{\perp} :

$$\frac{\partial u_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}} \Big|_{y_{\perp}=0} = \frac{\partial^2 \Psi_{\perp}(x_{\perp}, y_{\perp})}{\partial y_{\perp}^2} \Big|_{y_{\perp}=0} = 2^{2/3} (\alpha_1 x_{\perp}^{1/2} + \alpha_2 x_{\perp}^{3/4} + \alpha_3 x_{\perp} + \alpha_4 x_{\perp}^{5/4} + \dots) \quad (73)$$

Wprowadźmy teraz nowe zmienne bezwymiarowe zdefiniowane w sposób:

$$\eta = \sqrt[4]{x_{\perp}} \quad (74)$$

$$\xi \stackrel{\text{dr}}{=} \frac{y_{\perp}}{\sqrt{2} x_{\perp}^{1/4}} \quad (75)$$

Zagadnienie brzegowe (68) – (71) spróbujemy rozwiązać metodą sami-perturbacyjną. Będziemy poszukiwać nieznannej bezwymiarowej funkcji prądu Ψ_{\perp} w postaci następującego szeregu semi-perturbacyjnego (Goldstein, 1948):

$$\Psi_{\perp} = 2^{2/3} \xi^3 [f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \xi^4 f_4(\eta) + \dots] \quad (76)$$

gdzie $f_0(\eta), f_1(\eta), f_2(\eta), \dots$ jest ciągiem funkcji, które muszą być wyznaczone. Zmienna ξ jest tutaj zarazem parametrem semi-perturbacyjnym.

Podobnie, będziemy poszukiwać nieznannej bezwymiarowej prędkości stycznej u_{\perp} w postaci następującego szeregu semi-perturbacyjnego zawierającego ciąg pierwszych pochodnych funkcji $f_0(\xi), f_1(\xi), f_2(\xi), \dots$:

$$u_{\perp} = \frac{\partial \Psi_{\perp}}{\partial y_{\perp}} = 2 \xi^2 [f_0'(\eta) + \xi f_1'(\eta) + \xi^2 f_2'(\eta) + \xi^3 f_3'(\eta) + \xi^4 f_4'(\eta) + \dots] \quad (77)$$

Podstawiając rozwinięcia semi-perturbacyjne (76), (77) do równania (68) i dobierając wyrażenia z jednakowymi wartościami potęg zmiennej ξ otrzymamy ciąg równań różniczkowych dla poszczególnych funkcji $f_0(\eta), f_1(\eta), f_2(\eta), \dots$ (Goldstein, 1948).

Dla funkcji $f_0(\eta)$ będzie to równanie:

$$f_0'''(\eta) - 3f_0(\eta)f_0''(\eta) + 2\{f_0'(\eta)\}^2 = 1 \quad (78)$$

Warunki brzegowe dla wszystkich równań zawierających funkcje $f_n(\eta)$ są:

$$f_n(\eta) \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (79)$$

$$f_n'(\eta) \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (80)$$

Ponadto zachodzi ważna zależność:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_n'(\eta)}{\eta^{n+2}} = 2^{n/2} a_{n+2} \quad (81)$$

Rozwiązaniem nieliniowego równania (78) spełniającym warunki brzegowe (79), (80) jest:

$$f_0(\eta) = \frac{1}{6} \eta^3 \quad (82)$$

Stąd, korzystając z zależności (81), łatwo wyznaczymy współczynnik a_2 szeregu (72):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_0'(\eta)}{\eta^2} = 2^0 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \quad (83)$$

Dla funkcji $f_1(\eta)$ otrzymamy następujące równanie:

$$f_1'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_1''(\eta) + \frac{2}{5} \eta^2 f_1'(\eta) - 4\eta f_1(\eta) = 0 \quad (84)$$

Jest to równanie liniowe. Jego rozwiązaniem spełniającym warunki brzegowe (79), (80) jest:

$$f_1(\eta) = \alpha_1 \eta^2 \quad (85)$$

Korzystając z zależności (81) łatwo wyznaczmy współczynnik a_3 szeregu (72):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_1'(\eta)}{\eta^3} = 2^{1/2} a_3 \Rightarrow a_3 = 0 \quad (86)$$

Dla funkcji $f_2(\eta)$ otrzymamy następujące równanie:

$$f_2'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_2''(\eta) + 3\eta^2 f_2'(\eta) - 5\eta f_2(\eta) = 4f_1(\eta) f_1''(\eta) - 2 \{f_1'(\eta)\}^2 \quad (87)$$

Jest to również równanie liniowe, tym razem niejednorodne. Jego rozwiązaniem spełniającym warunki brzegowe (79), (80) jest:

$$f_2(\eta) = \alpha_1 \eta^2 - \frac{\alpha_1^2}{15} \eta^5 \quad (88)$$

Korzystając z zależności (81) łatwo wyznaczmy kolejny współczynnik a_4 szeregu (72):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_2'(\eta)}{\eta^4} = 2 a_4 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{6} \alpha_1^2 \quad (89)$$

Dla funkcji $f_3(\eta)$ otrzymamy następujące równanie:

$$f_3'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_3''(\eta) + \frac{7}{2} \eta^2 f_3'(\eta) - 6\eta f_3(\eta) = 4f_2''(\eta) f_1(\eta) + 5f_2(\eta) f_1''(\eta) - 7f_2'(\eta) f_1'(\eta) \quad (90)$$

lub, po podstawieniu wyrażen (85) i (88) na funkcje $f_1(\eta)$ i $f_2(\eta)$:

$$f_3'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_3''(\eta) + \frac{7}{2} \eta^2 f_3'(\eta) - 6\eta f_3(\eta) = -\alpha_1 \eta^2 \left(10\alpha_2 - \frac{3}{4} \alpha_1 \eta^3 \right) \quad (91)$$

Generalnie, poczynając od $n = 2$, równania różniczkowe dla kolejnych funkcji $f_n(\eta)$ można wyrazić w sposób:

$$f_n'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_n''(\eta) + \frac{n+4}{2} \eta^2 f_n'(\eta) - (n+3) \eta f_n(\eta) = G_n(\eta) \quad (92)$$

gdzie $G_n(\eta)$ wyraża się w sposób rekurencyjny w postaci:

$$G_n(\eta) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{m=0}^{n-1} \{(n-m+3) f_m''(\eta) f_{n-m}(\eta) - (n-m+3) f_m'(\eta) f_{n-m}'(\eta)\} + p_{n/4}, \quad n \geq 2 \quad (93)$$

Są to równania liniowe, mogą być więc przynajmniej teoretycznie rozwiązane metodami analitycznymi. Rozwiązania takie wyrażają się jednak skomplikowanymi wzorami i poczynając od $n = 3$ zawierają następujące wyrażenia w postaci szeregów nieskończonych:

$$g_n(\eta) \stackrel{\text{df}}{=} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-1/2-n/4) \Gamma(5/4)}{8^m (4m-1) \Gamma(-1/2-n/4) \Gamma(m+5/4)} \eta^{4m+1} \quad (94)$$

$$h_n(\eta) \stackrel{\text{df}}{=} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-3/4-n/4) \Gamma(3/4)}{8^m (2m-1) \Gamma(-3/4-n/4) \Gamma(m+3/4)} \eta^{4m} \quad (95)$$

gdzie $\Gamma(\dots)$ jest funkcją Eulera zdefiniowaną w sposób:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau \quad (96)$$

Rozwiązanie równania (91) spełniające warunki brzegowe (79), (80) wyraża się w postaci:

$$f_3(\eta) = \alpha_3 \eta^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 [\eta - g_3(\eta)] - \frac{8}{3} \alpha_1^2 \left[1 + \frac{1}{4} \eta^4 - h_3(\eta) \right] \quad (97)$$

lub, po podstawieniach wyrażen (94), (95):

$$f_3(\eta) = \alpha_3 \eta^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \left[\eta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/4) \Gamma(m-5/4)}{8^m (4m-1) \Gamma(-5/4) \Gamma(m+5/4)} \eta^{4m+1} \right] - \frac{8}{3} \alpha_1^2 \left[1 + \frac{1}{4} \eta^4 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(m-3/4)}{8^m (2m-1) \Gamma(-3/2) \Gamma(m+3/4)} \eta^{4m} \right] \quad (98)$$

Korzystając z zależności (81) możemy teraz wyznaczyć współczynnik a_5 szeregu (72):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_3'(\eta)}{\eta^5} = 2^{3/2} a_5 \Rightarrow a_5 = \frac{\sqrt{2}\pi}{40 \Gamma^2(5/4)} \alpha_1^3 \quad (99)$$

Wyznaczenie współczynnika a_5 pozwala na wyznaczenie współczynnika α_2 szeregu (73). Otrzymujemy go w postaci:

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt[4]{2}\pi^{3/2}}{5 \Gamma^3(5/4)} \alpha_1^2 \quad (100)$$

Dla kolejnej funkcji $f_4(\eta)$ otrzymamy następujące równanie:

$$f_4'''(\eta) - \frac{1}{2} \eta^3 f_4''(\eta) + 4\eta^2 f_4'(\eta) - 7\eta f_4(\eta) = 4f_3''(\eta) f_1(\eta) + 5f_2''(\eta) f_2(\eta) + 6f_1''(\eta) f_3(\eta) - 8f_3'(\eta) f_1'(\eta) - 4' \{f_2(\eta)\}^2 + p_1 \quad (101)$$

Rozwiązanie powyższego równania spełniające warunki brzegowe (79), (80) jest jak następuje:

$$f_4(\eta) = \alpha_4 \eta + \frac{p_1}{6} \left(\eta^3 - \frac{\eta^7}{105} \right) + 2(\alpha_1^2 - \alpha_3 \alpha_1) \{ \eta - g_4(\eta) \} - \frac{16}{7} \alpha_2 \alpha_1^2 \left\{ 1 + \frac{7}{24} \eta^4 - h_4(\eta) \right\} - \frac{32}{3} \alpha_1^4 \left[\lambda(\eta) + \frac{3\sqrt[2]{2}\pi^{3/2}}{28 \Gamma^3(5/4)} \left\{ 1 + \frac{7}{24} \eta^4 - h_4(\eta) \right\} \right] \quad (102)$$

gdzie

$$\lambda(\eta) = \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{(2m-3) \Gamma(3/4) \Gamma(m-3/2)}{8^m (2m+4)(4m+3) \Gamma(-3/2) \Gamma(m+1)} \eta^{4m+3} \right\} - \frac{3\sqrt[2]{2}\pi^{3/2}}{28 \Gamma^3(5/4)} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(4m-5) \Gamma(5/4) \Gamma(m-5/4)}{8^m (4m+4)(4m+3) \Gamma(-5/4) \Gamma(m+1) \Gamma(m+5/4)} \eta^{4m+4} \right\} \quad (103)$$

Korzystając z zależności (81) możemy teraz wyznaczyć współczynnik a_6 szeregu (72):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f_4'(\eta)}{\eta^6} = 2^4 a_6 \Rightarrow a_6 = \left\{ \frac{1}{9} - \frac{7\pi^2}{600 \Gamma^4(5/4)} \right\} \alpha_1^4 - \frac{p_1}{360} \quad (104)$$

Wyznaczenie współczynnika a_6 pozwala na wyznaczenie współczynnika α_3 szeregu (73). Otrzymujemy go w postaci:

$$\alpha_3 = \frac{\pi^3}{400 \Gamma^6(5/4)} (35 - 8\sqrt{2}) \alpha_1^3 \quad (105)$$

Wyznaczanie kolejnych funkcji $f_5(\eta), f_6(\eta), f_7(\eta), \dots$ można kontynuować dalej, lecz należy zadawać sobie sprawę z narastających stopniowo trudności rachunkowych. Podobnie, wyznaczać można kolejne współczynniki a_7, a_8, a_9, \dots oraz $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots$ dla szeregów (72), (73).

Spróbujmy teraz przebadać, jak zachowują się rozwiązania równań Prandtla za punktem oderwania $x_{\#}$. Wprowadzając wskaźnik \diamond jako odnoszący do dowolnej wielkości ‘za oderwaniem’ oraz wprowadźmy definicje następujących parametrów bezwymiarowych:

Bezwymiarowa odległość od punktu oderwania wzdłuż ścianki:

$$x_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{x - x_{\#}}{L} = -x_{\perp} \quad (106)$$

Bezwymiarowa odległość od punktu oderwania w kierunku normalnym do ścianki:

$$y_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{\text{Re}_{\perp}}}{L} y = y_{\perp} \quad (107)$$

Bezwymiarowa składowa prędkości styczna do ścianki:

$$u_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u_x}{u_{x,\#}} = u_{\perp} \quad (108)$$

Bezwymiarowa składowa prędkości normalna do ścianki:

$$v_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\text{Re}_{\perp}} \frac{v}{v_{\#}} = v_{\perp} \quad (109)$$

Bezwymiarowa prędkość strumienia zasadniczego:

$$U_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{U}{U_{\#}} = U_{\perp} \quad (110)$$

Bezwymiarowa funkcja prądu:

$$\Psi_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{\text{Re}_{\perp}}}{U_{\diamond} L} \Psi = \Psi_{\perp} \quad (111)$$

Bezwymiarowe ciśnienie:

$$P_{\diamond} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{P}{\rho U_{\diamond}^2} = P_{\perp} \quad (112)$$

Równanie Prandtla (1) możemy wówczas zapisać w sposób:

$$u_{\diamond} \frac{\partial u_{\diamond}}{\partial x_{\diamond}} + v_{\diamond} \frac{\partial u_{\diamond}}{\partial y_{\diamond}} = -\frac{\partial P_{\diamond}}{\partial x_{\diamond}} + \frac{\partial^2 u_{\diamond}}{\partial y_{\diamond}^2} \quad (113)$$

Wyrażając gradient ciśnienia poprzez prędkość w przepływie zasadniczym

$$\frac{\partial P_\diamond}{\partial x_\diamond} = U_\diamond \frac{\partial U_\diamond}{\partial x_\diamond} \quad (114)$$

oraz przedstawiając bezwymiarowe składowe u_\diamond i v_\diamond wektora prędkości w warstwie granicznej przy pomocy pochodnych bezwymiarowej funkcji prądu Ψ_\diamond

$$u_\diamond = \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} = u_\perp \quad (115)$$

$$v_\diamond = \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial x_\diamond} = -v_\perp \quad (116)$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} \frac{\partial^2 \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial x_\diamond \partial y_\diamond} - \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial x_\diamond} \frac{\partial^2 \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond^2} = U_\diamond \frac{\partial U_\diamond}{\partial x_\diamond} + \frac{\partial^3 \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond^3} \quad (117)$$

Warunki brzegowe dla równ. (117) są jak następuje:

$$\Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond) \Big|_{y_\diamond=0} = 0 \quad (118)$$

$$u_\diamond(x_\diamond, y_\diamond) \Big|_{y_\diamond=0} = \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} \Big|_{y_\diamond=0} = 0 \quad (119)$$

$$u_\diamond(x_\diamond, y_\diamond) \Big|_{y_\diamond \rightarrow \infty} = \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} \Big|_{y_\diamond \rightarrow \infty} = U_\diamond \quad (120)$$

Zauważmy, że bezwymiarowa odległość od punktu oderwania x_\diamond przyjmuje wartości dodatnie za punktem oderwania $x_\#$, a wartość x_\diamond rośnie tym bardziej im jesteśmy dalej za $x_\#$.

Nieznaną funkcję wyrażającą zależność bezwymiarowej składowej stycznej prędkości u_\diamond od bezwymiarowej odległości od ścianki y_\diamond w kierunku prostopadłym do ścianki w punkcie oderwania $x_\#$ wyrazić możemy w postaci szeregu nieskończonego (Goldstein, 1948):

$$u_\diamond(x_\diamond, y_\diamond) \Big|_{x_\diamond=0} = \frac{\partial \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} \Big|_{x_\diamond=0} = \frac{1}{2} y_\diamond^2 + b_3 y_\diamond^3 + b_4 y_\diamond^4 + b_5 y_\diamond^5 + \dots \quad (121)$$

Podobnie zrobić możemy z pochodną prędkości u_\diamond względem y_\diamond :

$$\frac{\partial u_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond} \Big|_{y_\diamond=0} = \frac{\partial^2 \Psi_\diamond(x_\diamond, y_\diamond)}{\partial y_\diamond^2} \Big|_{y_\diamond=0} = 2^{2/3} (\gamma_1 x_\diamond^{1/2} + \gamma_2 x_\diamond^{3/4} + \lambda_3 x_\diamond + \gamma_4 x_\diamond^{5/4} + \dots) \quad (122)$$

Wprowadźmy teraz nowe zmienne bezwymiarowe zdefiniowane w sposób:

$$\eta_\diamond = \sqrt[4]{x_\diamond} \quad (123)$$

$$\xi_\diamond = \frac{y_\diamond}{\sqrt{2} x_\diamond^{1/4}} \quad (124)$$

Zagadnienie brzegowe (117) – (120) spróbujemy rozwiązać metodą sami-perturbacyjną, podobnie jak dla zagadnienia brzegowego (68) – (71). Będziemy poszukiwać nieznaną bezwymiarową funkcji prądu Ψ_\diamond w postaci następującego szeregu semi-perturbacyjnego (Goldstein, 1948):

$$\Psi_{\diamond} = 2^{3/2} \xi_{\diamond}^3 \left[\varphi_0(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond} \varphi_1(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^2 \varphi_2(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^3 \varphi_3(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^4 \varphi_4(\eta_{\diamond}) + \dots \right] \quad (125)$$

gdzie $\phi_0(\eta_{\diamond})$, $\phi_1(\eta_{\diamond})$, $\phi_2(\eta_{\diamond})$, ... jest ciągiem funkcji, które muszą być wyznaczone. Zmienna ξ_{\diamond} jest tutaj zarazem parametrem semi-perturbacyjnym.

Podobnie, będziemy poszukiwać nieznannej bezwymiarowej prędkości stycznej u_{\diamond} w postaci następującego szeregu semi-perturbacyjnego zawierającego ciąg pierwszych pochodnych funkcji $\phi_0(\eta_{\diamond})$, $\phi_1(\eta_{\diamond})$, $\phi_2(\eta_{\diamond})$, ...:

$$u_{\diamond} = \frac{\partial \Psi_{\diamond}}{\partial y_{\diamond}} = 2 \xi_{\diamond}^2 \left[\varphi_0'(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond} \varphi_1'(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^2 \varphi_2'(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^3 \varphi_3'(\eta_{\diamond}) + \xi_{\diamond}^4 \varphi_4'(\eta_{\diamond}) + \dots \right] \quad (126)$$

Podstawiając rozwinięcia semi-perturbacyjne (125), (126) do równania (117) i dobierając wyrażenia z jednakowymi wartościami potęg zmiennej ξ_{\diamond} otrzymamy ciąg równań różniczkowych dla poszczególnych funkcji $\phi_0(\eta_{\diamond})$, $\phi_1(\eta_{\diamond})$, $\phi_2(\eta_{\diamond})$, ... (Goldstein, 1948).

Dla funkcji $\phi_0(\eta_{\diamond})$ będzie to równanie:

$$\varphi_0'''(\eta_{\diamond}) + 3\varphi_0(\eta_{\diamond}) \varphi_0''(\eta_{\diamond}) - 2\{\varphi_0'(\eta_{\diamond})\}^2 = 1 \quad (127)$$

bardzo podobne do równania (78).

Warunki brzegowe dla wszystkich równań zawierających funkcje $\phi_n(\eta_{\diamond})$ są analogiczne jak dla wszystkich równań zawierających funkcje $f_n(\eta)$, tj.:

$$\varphi_n(\eta_{\diamond}) \Big|_{\eta_{\diamond}=0} = 0 \quad (128)$$

$$\varphi_n'(\eta_{\diamond}) \Big|_{\eta_{\diamond}=0} = 0 \quad (129)$$

Ponadto zachodzi ważna zależność:

$$\lim_{\eta_{\diamond} \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n'(\eta_{\diamond})}{\eta_{\diamond}^{n+2}} = 2^{n/2} b_{n+2} \quad (130)$$

gdzie b_n są współczynnikami rozwinięcia (121).

Rozwiązaniem nieliniowego równania (127) spełniającym warunki brzegowe (128), (129) jest:

$$\varphi_0(\eta_{\diamond}) = \frac{1}{6} \eta_{\diamond}^3 \quad (131)$$

Stąd, korzystając z zależności (130), łatwo wyznaczymy współczynnik b_2 szeregu (121):

$$\lim_{\eta_{\diamond} \rightarrow \infty} \frac{\varphi_0'(\eta_{\diamond})}{\eta_{\diamond}^2} = 2^0 b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \quad (132)$$

Dla funkcji $\phi_1(\eta_{\diamond})$ otrzymamy następujące równanie:

$$\varphi_1'''(\eta_{\diamond}) + \frac{1}{2} \eta_{\diamond}^3 \varphi_1''(\eta_{\diamond}) - \frac{2}{5} \eta_{\diamond}^2 \varphi_1'(\eta_{\diamond}) + 4\eta_{\diamond} \varphi_1(\eta_{\diamond}) = 0 \quad (133)$$

Jest to równanie liniowe. Jego rozwiązaniem spełniającym warunki brzegowe (128), (129) jest:

$$\varphi_1(\eta_{\diamond}) = \gamma_1 \eta_{\diamond}^2 \quad (134)$$

Korzystając z zależności (130) łatwo wyznaczymy współczynnik b_3 szeregu (121):

$$\lim_{\eta_{\diamond} \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1'(\eta_{\diamond})}{\eta_{\diamond}^3} = 2^{1/2} b_3 \Rightarrow b_3 = 0 \quad (135)$$

Dla funkcji $\phi_2(\eta_\delta)$ otrzymamy następujące równanie:

$$\varphi_2'''(\eta_\delta) + \frac{1}{2} \eta_\delta^3 \varphi_2''(\eta_\delta) - 3\eta_\delta^2 \varphi_2'(\eta_\delta) + 5\eta_\delta \varphi_2(\eta_\delta) = -4 \varphi_1(\eta_\delta) \varphi_1''(\eta_\delta) + 2 \{\varphi_1'(\eta_\delta)\}^2 \quad (136)$$

lub, po podstawieniu reprezentacji (134) dla funkcji $\phi_1(\eta_\delta)$ i jej pochodnych:

$$\varphi_2'''(\eta_\delta) + \frac{1}{2} \eta_\delta^3 \varphi_2''(\eta_\delta) - 3\eta_\delta^2 \varphi_2'(\eta_\delta) + 5\eta_\delta \varphi_2(\eta_\delta) = 4 \gamma_1 \eta_\delta^2 \quad (137)$$

Jest to również równanie liniowe, tym razem niejednorodne. Jego rozwiązaniem spełniającym warunki brzegowe (128), (129) jest:

$$\varphi_2(\eta) = \gamma_1 \eta_\delta^2 + \frac{\gamma_1^2}{15} \eta_\delta^5 \quad (138)$$

Korzystając z zależności (130) łatwo wyznaczmy kolejny współczynnik a_4 szeregu (121):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2'(\eta_\delta)}{\eta_\delta^4} = 2 b_4 \Rightarrow b_4 = \frac{1}{6} \gamma_1^2 \quad (139)$$

Jak dotąd widzimy, że rozwiązania dla funkcji $\phi_0(\eta_\delta)$, $\phi_1(\eta_\delta)$, $\phi_2(\eta_\delta)$ odnoszące się do problemu ‘za oderwaniem’ są niemal identyczne z rozwiązaniami dla funkcji $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$ ‘przed oderwaniem’.

W przypadku formuły (138) występuje jednak z pozoru niewielka, lecz nader istotna różnica w porównaniu z formułą (89): Parametr rozwinięcia b_4 dla obszaru za oderwaniem różni się od parametru rozwinięcia a_4 dla obszaru przed oderwaniem jedynie znakiem. Ta niewielka z pozoru różnica powoduje istotne konsekwencje z wyjątkiem przypadku, gdy $\alpha_4 = \gamma_4 = 0$. Parametr rozwinięcia a_4 dla obszaru przed oderwaniem jest zawsze ujemny i istnieją wówczas rozwiązania problemu spełniające warunki brzegowe. Natomiast parametr rozwinięcia b_4 dla obszaru za oderwaniem jest zawsze dodatni, lecz w takim przypadku nie istnieją rozwiązania problemu spełniające warunki brzegowe. Oznacza to, że rozwiązania równań Prandtla istniejące przed oderwaniem nie mogą być rozciągnięte na obszar za oderwaniem !

Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że linia oderwania jest nie tylko linią osobliwą rozwiązań równań Prandtla, jak to postulowali w swojej monografii Landau i Lifszyc (1944, 1958). Linia separacji stanowi linię istotnie osobliwą, która oddziela strefę przepływu regularnego, którego zachowanie opisane jest równaniami teorii warstwy granicznej Prandtla, od oderwanego obszaru przepływu wstecznego, do opisu którego równania teorii warstwy granicznej w formie sformułowanej przez Prandtla przestają być adekwatne.

Niniejsza publikacja stanowi prezentację wyników uzyskanych w trakcie realizacji zadania *Temat XIII/ Z1.6* wykonywanego w ramach prac statutowych Instytutu Mechaniki Górotworu PAN w 2011 roku, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- BATCHELOR G.K., (1967): *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BATCHELOR G.K., (1985): informacja prywatna.
- BLASIUS H., (1908): *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, **56**, 1.
- FALKNER W.M., SKAN S.W., (1930): Aeronautic Research Council, Reports and Memoranda, No. 1314.
- FALKNER W.M., SKAN S.W., (1931): *Some Approximations of Boundary Layer Equations*, Philosophical Magazine, **12**, 865.
- GOLDSTEIN S., (1948): *On Laminar Boundary-Layer Flow near a Position of Separation*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **1**, 43.
- HOWARTH L., (1959): *Laminar Boundary Layers*, in *Handbuch der Physik*, herausgegeben von S. FLÜGGE und C. TRUESDELL, Bd. VIII/1 *Strömungsmechanik I*, Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg.
- LANDAU L.D., LIFSHITS E.M., (1944): *Mekhanika sploshnykh sred*, Moskva, wydanie polskojęzyczne *Mechanika ośrodków ciągłych*, Warszawa, (1958).

- LEONARDO DA VINCI, (XVI): *Del moto e misura dell'acqua*, l'manuscripto di XVI secolo, Editori: E. CARUSI, A. FAVARO, Zanichelli, Bologna, (1923).
- PRANDTL L., (1904): *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen der dritten Internationale Mathematische Kongress, Heidelberg, 1904, printed: Leipzig, (2005).
- QUARTAPELLE L., SCANDROGLIO A., (2006): *Solution of the Falkner-Skan Equation to Determine Reverse Flow*, http://www.aero.polmi.it/~quartape/bacheca/materiale_didattico/Falkner_skann.pdf.
- SCHLICHING H., (1965): *Grenzschicht-Theorie*, Braun, Karlsruhe.
- SCHLICHING H., GERSTEIN K., (2000): *Boundary Layer Theory*, Springer, Berlin.
- TANEDA S., (1956a): *Journal of Physical Society of Japan*, **11**, 302.
- TANEDA S., (1956b): *Report Research of the Institute of Applied Mechanics, Kiushiu University*, **4**, 99.

The Analysis of Backward Flow Formation past Bluff Bodies

Abstract

The analysis of accelerating and decelerating flows of real fluids in the vicinity of fixed walls has been presented. Fluid motions in the laminar boundary layer have been considered by means of the Prandtl equations. Applying numerical solutions of self-similar flow equations it has been demonstrated that the accelerating flows is represented by regular fluid motions whereas for decelerating flows there are singularities corresponding with separation points and separation lines. For the separation zones there are families of various solutions, and rare of them possess physical meaning. The vanishing of fluid vorticity in the distance from fixed wall has been applied as the condition of physical correctness of the formal solution. Elaborate considerations based on the semi-perturbation methods and concerning the flow in the vicinity of the separation point have been presented. The analysis of flow equations for the stream function Ψ for upstream and downstream zones with respect to the separation point have demonstrated that exact solutions of the Prandtl equations which describe correctly the fluid motion in the laminar boundary layer upstream the separation point do not possess a prolongation in the separation zone, i.e. downstream the separation point.

Keywords: boundary layer, Prandtl equations, recirculating flow, flow separation