Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN
Tom 10, nr 1-4, (2008), s. 193-204

Modelowanie przepływu w ośrodku porowatym z nieliniowym prawem filtracji

MARIUSZ R. SŁAWOMIRSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN, Ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

Streszczenie

Tematem pracy jest analiza przepływu z nieliniowym dynamicznym prawem filtracji wiążącym prędkość filtracji U z jednostkowym spadkiem ciśnienia J w ośrodku porowatym. Rozpatrzono szczegółowo jedynie taką formułę dynamicznego prawa filtracji, która jest niezmiennicza względem odbicia lustrzanego oraz możliwa do bezpośredniego rozszerzenia na przepływy wielowymiarowe. Odrzucając znane z literatury formuły nie spełniające powyższych warunków (tj. traktowane jako niepoprawne fizykalnie) oraz stosując twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji i wykorzystując wyniki uzyskane z teorii homogenizacji rozważono przepływy z dynamicznym prawem filtracji w postaci dwuparametrowego równania trzeciego rzędu (13) lub równoważnie (14). Przeanalizowano prostoliniowy przepływ jednowymiarowy, przepływ osiowo-symetryczny oraz sferyczno-symetryczny. Uzyskano formuły na rozkład ciśnienia w strefie drenażu oraz nieliniową zależność między produkcją studni (odwiertu) a wielkością depresji w strefie drenażu. Podobnie, uzyskano rozkład ciśnienia w przepływie sferyczno-symetrycznym, a także formuły na zależność między natężeniem przepływu a występującym w takim przepływie spadkiem ciśnienia. Sformułowano równanie różniczkowe transportu opisujące dwuwymiarowy nieliniowy przepływ w ośrodku porowatym. Ze względu na istniejące nieliniowości równanie to może być rozwiązane jedynie metodami numerycznymi.

Słowa kluczowe: hydrodynamika małych liczb Reynoldsa, przepływy w ośrodkach porowatych, nieliniowe dynamiczne prawo filtracji

1. Nieliniowe dynamiczne formuły filtracji

Przepływ w ośrodku porowatym opisany jest równaniem dynamicznym wyrażającym relację między prędkością filtracji U a spadkiem ciśnienia przypadającym na jednostkę miąższości ośrodka porowatego J. Opierając się na badaniach doświadczalnych dotyczących przepływu wody w piaskach o rozmaitej granulacji Henry Darcy już ponad 150 lat temu (1856) zaproponował liniowy, tj. proporcjonalny związek miedzy tymi parametrami, zwany obecnie formułą Darcy'ego. Obecnie związek ten zapisuje się najczęściej w postaci:

$$U = \frac{K}{\mu} J \tag{1}$$

gdzie K jest przepuszczalnością ośrodka porowatego, a μ – lepkością przepływającego płynu. Alternatywnie, zależność (1) przedstawić można w postaci:

$$aU = J \tag{2}$$

gdzie a jest tzw. opornością hydrodynamiczną.

Formułę Darcy'ego (1) można też następująco zapisać w postaci różniczkowej przy pomocy ciśnienia P

$$U = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dx} \tag{3}$$

a następnie uogólnić ją do postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{U} = -\frac{K(x)}{\mu}\,\mathrm{grad}\,P \tag{4}$$

Znak ujemny w prawej stronie równań (3) i (4) pochodzi stąd, że kierunek przepływu płynu jest zgodny z kierunkiem spadku a nie wzrostu ciśnienia.

Mimo powszechnego stosowania liniowej formuły Darcy'ego w przeciągu ostatnich 150 lat w badaniach doświadczalnych wielokrotnie obserwowano występowanie stosunku do niej większych czy mniejszych odchyłek. Jeszcze w XIX wieku liniowa relacja Darcy'ego (2) zakwestionowana została przez Smerekera (1878a, 1878b, 1879), a następnie Kröebera (1984), którzy przeprowadzili również doświadczalne badania filtracji wody przez piaski o rozmaitej granulacji. Smereker przeanalizował nawet szczegółowo wyniki pomiarów przeprowadzonych przez Darcy'ego i wykazał ich niewielką odchyłkę od liniowego równania (2).

Pomimo tego formuła Darcy'ego jest powszechnie stosowana w hydrodynamice podziemnej, hydrogeologii i inżynierii złożowej. Liniowość stanowi bowiem jej wielką zaletę, gdyż podstawiając równanie (4) do równania ciągłości przepływu w ośrodku porowatym

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U} + q = 0 \tag{5}$$

otrzymuje się bezpośrednio następujące równanie transportu płynu w ośrodku porowatym zawierające rozkład ciśnienia $P(x)$ jako podstawową zmienną zależną:

$$\mathrm{div}\left[\frac{K(x)}{\mu}\,\mathrm{grad}\,P(x)\right] = q(x) \tag{6}$$

Występująca w równaniach (5) i (6) intensywność źródeł q reprezentuje wielkość produkcji studni lub odwiertów przypadającą na jednostkę objętości. Wyraża się ona w odwrotnościach sekundy i jest zazwyczaj traktowana jako parametr zadany a priori.

Istnienie odchyleń od liniowej formuły Darcy'ego stało się bardziej znane dopiero w wyniku publikacji Forchheimera (1901, 1914, 1930). Wielu autorów zaproponowało alternatywne w stosunku do Darcy'ego formuły dla zależności między prędkością filtracji U a jednostkowym spadkiem ciśnienia J nadając im na ogół postać potęgową lub wielomianową, np.:

$$aU + b\sqrt{U} = J \qquad \text{(Smereker, 1878, 1879)} \tag{7}$$

$$aU + bU^2 = J \qquad \text{(Forchheimer, 1901)} \tag{8}$$

$$aU + bU^{\kappa} = J, \quad \kappa \in [1.6; 1.8] \qquad \text{(Forchheimer, 1930)} \tag{9}$$

$$bU^2 = J \qquad \text{(Burke i Plummer, 1928)} \tag{10}$$

$$aU^{\kappa} = J, \quad \kappa \cong 1.8 \qquad \text{(White, 1935)} \tag{11}$$

gdzie a, b, κ są parametrami równania dynamicznego, które powinny być wyznaczone na drodze doświadczalnej. Formuły te wynikały z rozważań dotyczących mikrostruktury przepływów w kanałach porowych lub też z badań doświadczalnych przeprowadzanych w skali fenomenologicznej. Scheideger (1960) oraz późniejsi autorzy starali się wyrazić parametry fenomenologiczne a, b przy pomocy parametrów mikrostrukturalnych ośrodka porowatego, takich jak porowatość, krętość kanałów porowych, powierzchnia właściwa ośrodka, etc. Bliższe omówienie nieliniowych dynamicznych formuł przepływu przedstawione jest w monografii Beara (1972) oraz artykule przeglądowym Hanoury i Barendsa (1981).

Należy zwrócić jednak uwagę, że prezentowane tu formuły (7), (8), (9) (10), (11) nie są w pełni poprawne pod względem fizykalnym, gdyż nie są one niezmiennicze względem odbicia lustrzanego. Podstawiając na przykład w formule Forchheimera (8) $U = 10^{-5}$ m/s, $a = 10^2$ Pa s/m^2 , $b = 2\ 10^6$ Pa s^2/m^3 otrzymamy $J = 1.2\ 10^{-2}$ Pa/m. Zmiana kierunku przepływu na przeciwną, tj. podstawienie $U = -10^{-5}$ m/s powinno prowadzić do zmiany wartości jednostkowego spadku ciśnienia również na przeciwną, tj. na $J = -1.2\ 10^{-2}$ Pa/m. Tymczasem wzór (8) daje w tym przypadku $J = -0.8\ 10^{-2}$ Pa/m. W równaniach (7), (9), (11) nie bardzo wiadomo jak mamy interpretować podniesienie ujemnej prędkości filtracji U do potęgi niecałkowitej. Ponadto żadne z powyższych równań (7), (8), (9), (10), (11) nie może być bezpośrednio rozszerzone na przepływy wielowymiarowe, gdyż sumowanie wielkości wektorowej jaką jest prędkość filtracji $\boldsymbol{U}$ i wielkości skalarnej w postaci jej kwadratu $\boldsymbol{U}^2$ jest pozbawione sensu.

Należy jednak pamiętać, że występująca w lewych stronach równań ciągła funkcja prędkości filtracji U może być, zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa zawsze aproksymowana wielomianowo. Mamy więc:

$$\sum_{n=1} a_n U^n = J \tag{12}$$

Spośród możliwych wielomianów składających się z niewielkiej liczby członów nietrudno zaważyć, że relacja w postaci

$$aU + cU^3 = J \tag{13}$$

lub alternatywnie

$$U + \beta U^3 = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dx} \tag{14}$$

jest niezmiennicza względem odbicia lustrzanego. Może zatem stanowić prawidłowy sposób opisu nieliniowego przepływu trzeciego stopnia w ośrodku porowatym. Nietrudno zauważyć, że parametr β występujący w równaniu (14) wyraża odchyłkę dynamicznego równania filtracji od formuły Darcy'ego.

Formuły trzeciego rzędu (13), (14) reprezentują również poprawne sformułowanie relacji między wielkościami U i J z punktu widzenia teorii homogenizacji. Teoria ta sformułowana w latach siedemdziesiątych (Ariault et al. 1977, 1980; Ene, 1975) opisuje własności ośrodków, których mikrostrukturę stanowią powtarzające się komórki o identycznych własnościach. Taktując przestrzeń porową jako składającą się z kanałów o periodycznie zmiennych przekrojach Miei i Ariault (1993) wykazali, że relacja miedzy prędkością filtracji U a jednostkowym spadkiem ciśnienia J wyrażać się powinna wzorem (13).

Nietrudno ponadto zauważyć, że formuła trzeciego rzędu może być łatwo uogólniona na przepływy wielowymiarowe. Podstawiając w miejsce prędkości filtracji U odpowiadający jej wektor $\boldsymbol{U}$ otrzymamy:

$$\boldsymbol{U} + \beta \boldsymbol{U}^3 = -\frac{K(x)}{\mu}\,\mathrm{grad}\,P \tag{15}$$

lub alternatywnie, biorąc pod uwagę, że kwadrat wektora jest skalarem równym kwadratowi długości tego wektora:

$$\boldsymbol{U} + \beta |\boldsymbol{U}|^2\,\boldsymbol{U} = -\frac{K(x)}{\mu}\,\mathrm{grad}\,P \tag{16}$$

Relacja trzeciego rzędu (13) lub (14) jest też zgodna z pomiarami doświadczalnymi przeprowadzonymi na hydrodynamicznych modelach przestrzeni porowej i przedstawionymi przez Cieślickiego i Lasowską (1995). Z powyższych względów relacja ta stanowić będzie podstawę do dalszych rozważań na temat nieliniowych przepływów w ośrodku porowatym. Niestety, z powodu istniejącej nieliniowości trzeciego stopnia analiza ruchu płynu opisanego równaniem dynamicznym (15) jest znacznie bardziej skomplikowana od badania przepływu podlegającego formule Darcy'ego (4).

2. Jednowymiarowy przepływ prostoliniowy

Jednowymiarowy przepływ prostoliniowy cieczy nieściśliwej stanowi najprostszy przypadek ruchu płynu w ośrodku porowatym. W przypadku przepływu tego typu podlegającego formule Darcy'ego prędkość ruchu płynu w ośrodku porowatym jest liniowa tj. proporcjonalna do spadku ciśnienia. Nie jest tak jednak w przypadku przepływu podlegającego nieliniowej formule filtracji. Zależność (14) zapisana w postaci

$$U^3 + 3\frac{1}{3\beta}U - 2\frac{KJ}{2\beta\mu} = 0 \tag{17}$$

stanowi równanie kubiczne względem niewiadomej prędkości U. Równanie to ma dodatni wyróżnik

$$D = \left(\frac{KJ}{2\beta\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3 \tag{18}$$

posiada zatem jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone. Pierwiastek rzeczywisty wyznacza się ze wzoru Cardana:

$$U = \sqrt[3]{\frac{KJ}{2\beta\mu} + \sqrt{\left(\frac{KJ}{2\beta\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{KJ}{2\beta\mu} - \sqrt{\left(\frac{KJ}{2\beta\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} \tag{19}$$

Natomiast pierwiastki zespolone równania (19) mają sens jedynie czysto matematyczny i nie posiadają fizykalnego znaczenia.

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (18) wyróżnik równania jest dodatni niezależnie od tego, czy jednostkowy spadek ciśnienia J jest dodatni czy też ujemny – równanie (17) ma więc zawsze jeden 'fizykalny' pierwiastek rzeczywisty oraz dwa zespolone. Ponadto nietrudno zauważyć, że jeśli jednostkowy spadek ciśnienia J jest dodatni, wówczas zgodnie ze wzorem (19) prędkość filtracji U jest dodatnia; jeśli natomiast jednostkowy spadek ciśnienia J jest ujemny, wówczas zgodnie z tym samym wzorem (19) prędkość filtracji U będzie ujemna. Przy tym zmiana znaku wielkości J na przeciwny bez zmiany magnitudy spowoduje jedynie zmianę znaku prędkości U na przeciwny bez zmiany jej wartości liczbowej.

Wyrażając wielkość J przy pomocy stosunku różnicy ciśnień $P_o - P_1$ i odległości Δx oraz dokonując prostych przekształceń wzoru (19) otrzymamy:

$$\begin{aligned} U = {} & \sqrt[3]{\frac{K}{2\beta\mu}\frac{P_o - P_1}{\Delta x} + \sqrt{\left(\frac{K}{2\beta\mu}\right)^2\left(\frac{P_o - P_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} \\ & + \sqrt[3]{\frac{K}{2\beta\mu}\frac{P_o - P_1}{\Delta x} - \sqrt{\left(\frac{K}{2\beta\mu}\right)^2\left(\frac{P_o - P_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} \end{aligned} \tag{20}$$

lub równoważnie:

$$\begin{aligned} U = {} & \sqrt[3]{\frac{K}{2\beta\mu}\frac{P_o - P_1}{\Delta x}}\left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27\beta^3}\left(\frac{2\beta\mu}{K}\right)^2\left(\frac{\Delta x}{P_o - P_1}\right) + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}}\right. \\ & \left. + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{27\beta^3}\left(\frac{2\beta\mu}{K}\right)^2\left(\frac{\Delta x}{P_o - P_1}\right) + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}}\right] \end{aligned} \tag{21}$$

3. Przepływ osiowo-symetryczny

Przepływ osiowo-symetryczny wykazuje symetrię cylindryczną. Klasycznym przykładem przepływu osiowo-symetrycznego w ośrodku porowatym jest dopływ do pionowej studni lub odwiertu pochodzący z nieograniczonej warstwy poziomej o stałej miąższości h. W takim przypadku rozważania najlepiej prowadzić w cylindrycznym układzie współrzędnych r, θ, z. Ze względu na symetrię radialną parametry przepływu nie są wówczas funkcjami zmiennej kątowej θ ani zmiennej osiowej z. W przypadku przepływów podlegających formule Darcy'ego rozkład ciśnienia w płynie dopływającym z kolistej strefy drenażu o promieniu R_e do studni o promieniu R_w dany jest wzorem:

$$P(r) = P_w + \frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_w}\right) \tag{22}$$

gdzie P_e jest ciśnieniem na zewnętrznym brzegu strefy drenażu, P_w ciśnieniem na ściance studni, a r odległością od pionowej osi odwiertu. Natomiast związek miedzy wielkością depresji studni, tj. różnicą ciśnień $P_e - P_w$ a wydatkiem przepływu Q wyraża się wzorem:

$$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)} \tag{23}$$

lub bardziej precyzyjnie

$$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right) + s} \tag{24}$$

gdzie s jest współczynnikiem naskórkowości.

Formuły (22) – (24) dobrze znane z inżynierii złożowej ulec muszą modyfikacji dla nieliniowych przepływów w ośrodku porowatym.

W otoczeniu osiowo-symetrycznej studni lub odwiertu przepływ ma charakter osiowo-symetryczny i bezźródłowy, dlatego też w przypadku warstwy porowatej o stałej miąższości h równanie ciągłości przepływu (5) uprości się wówczas do postaci:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}(rU)\right] = 0 \tag{25}$$

Do równania tego dołączyć można warunek renormalizacyjny, zgodnie z którym natężenie dopływu do odwiertu Q równe jest strumieniowi prędkości płynu U przez powierzchnię boczną ścianki o wysokości h. Pamiętając, że ścianka boczna odwiertu tworzy powierzchnię walcową o promieniu R_w, mamy:

$$Q = 2\pi R_w h U(R_w) \tag{26}$$

Warunek ten jest to równoważny następującemu warunkowi brzegowemu dla równania (25):

$$U(r)\Big|_{r=R_w} = \frac{Q}{2\pi R_w h} \tag{27}$$

przy czym natężenie przepływu Q traktowane jest jako wielkość znana.

Rozwiązanie równania (25) ma postać ogólną:

$$U(r) = -\frac{C}{r} \tag{28}$$

Znak ujemny w prawej stronie wyrażenia (28) związany jest z tym, że dopływ następuje do odwiertu, tj. kierunek ruchu płynu jest przeciwny niż kierunek wzrastania zmiennej radialnej r. Warunek brzegowy (27) pozwala na wyznaczenie stałej całkowania C w postaci:

$$C = \frac{Q}{2\pi h} \tag{29}$$

Daje to następującą formułę na rozkład prędkości w otoczeniu odwiertu:

$$U(r) = -\frac{Q}{2\pi h r} \tag{30}$$

Równanie dynamiczne dla nieliniowego radialnego przepływu w otoczeniu odwiertu będzie jak następuje:

$$U + \beta U^3 = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dr} \tag{31}$$

Po podstawieniu formuły (30) na rozkład prędkości będziemy mieć:

$$-\frac{Q}{2\pi hr}-\beta\left(\frac{Q}{2\pi hr}\right)^3=-\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dr} \tag{32}$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego daje następujący wzór ogólny na rozkład ciśnienia w strefie drenażu:

$$P(r)=\frac{\mu}{K}\left(\frac{Q}{2\pi h}\ln r-\frac{\beta Q^3}{8\pi^3h^3}\frac{1}{r^2}\right)+B \tag{33}$$

Stała całkowania B wyznaczona z warunku wielkości ciśnienia P_w na ściance cylindrycznej studni o promieniu R_w

$$P(r)\big|_{r=R_w}=P_w \tag{34}$$

jest:

$$B=P_w-\frac{\mu}{K}\left(\frac{Q}{2\pi h}\ln R_w-\frac{\beta Q^3}{8\pi^3h^3}\frac{1}{R_w^2}\right) \tag{35}$$

Otrzymujemy stąd następujący ostateczny wzór na rozkład ciśnienia w strefie drenażu odwiertu w warunkach nieliniowego przepływu trzeciego rzędu:

$$P(r)=P_w+\frac{\mu}{K}\left[\frac{Q}{2\pi h}\ln\left(\frac{r}{R_w}\right)+\frac{\beta Q^3}{8\pi^3h^3}\left(\frac{1}{R_w^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right] \tag{36}$$

Ciśnienie na zewnętrznym brzegu strefy drenażu studni o promieniu R_e będzie:

$$P_e=P(r)\big|_{r=R_e}=P_w+\frac{\mu}{K}\left[\frac{Q}{2\pi h}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)+\frac{\beta Q^3}{8\pi^3h^3}\left(\frac{1}{R_w^2}-\frac{1}{R_e^2}\right)\right] \tag{37}$$

Zależność powyższą zapisać można jako równanie kubiczne względem wydatku studni Q:

$$Q^3+3\frac{8\pi^2h^2}{3\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)Q-2\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\frac{K}{\mu}(P_e-P_w)=0 \tag{38}$$

Wyróżnik powyższego równania sześciennego jest jak następuje:

$$D=\left[\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\frac{K}{\mu}(P_e-P_w)\right]^2+\left[\frac{8\pi^2h^2}{3\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)\right]^3 \tag{39}$$

lub:

$$D=\left(\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\right)^2\left[\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{8}{9}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)\right] \tag{40}$$

Ponieważ wyróżnik równania sześciennego jest dodatni, zatem posiada ono dwa rozwiązania zespolone i jedno rzeczywiste. Rozwiązania zespolone nie posiadają znaczenia fizykalnego, natomiast rozwiązanie rzeczywiste dane wzorem Cardana ma postać:

$$Q=\sqrt[3]{\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\frac{K}{\mu}(P_e-P_w)+\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\sqrt{\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{8}{9}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)}}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\frac{K}{\mu}(P_e-P_w)-\frac{8\pi^3h^3}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\sqrt{\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{8}{9}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)}} \tag{41}$$

lub po uporządkowaniu:

$$Q=2\pi h\sqrt[3]{\frac{K}{\mu\beta}(P_e-P_w)\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{8}{9}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{8}{9}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}\ln\left(\frac{R_e}{R_w}\right)}}\right] \tag{42}$$

Wzór (42) dla przepływu nieliniowego stanowi odpowiednik prostego wzoru (23) na relację między wydatkiem produkcji odwiertu a wielkością występującej depresji ciśnienia dla przepływu Darcy'ego. Jak widać z porównania wzorów (23) i (42) w przeciwieństwie do proporcjonalnej zależności między wydatkiem a depresją dla przepływu Darcy'ego w przypadku przepływu nieliniowego relacja ta ma skomplikowaną postać potęgowo-pierwiastkową.

W przypadku, gdy wyrażenia pod pierwiastkiem kwadratowym we wzorze (42) nie różnią się zbytnio od jedności, wówczas otrzymujemy następujący przybliżony wzór:

$$Q\cong 2\pi h\sqrt[3]{\frac{2K}{\mu\beta}(P_e-P_w)\frac{R_e^2R_w^2}{R_e^2-R_w^2}} \tag{43}$$

Zgodnie z przybliżonym wzorem dla przepływu nieliniowego opisanego formuła dynamiczną (14) wielkość wydatku odwiertu jest proporcjonalna do pierwiastka sześciennego sześciennego z wielkości depresji ciśnienia.

4. Przepływ radialno-symetryczny

Przepływ radialno-symetryczny wykazuje symetrię sferyczną. Jest on rzadziej spotykany niż przepływ osiowo-symetryczny, lecz jego analiza posiada również znaczenie praktyczne. Radialno-symetryczny kształt (a ściślej mówiąc stożkowy) posiadają niektóre rodzaje filtrów stosowanych w przemyśle chemicznym i farmaceutycznym. Ponadto ruch płynu złożowego o symetrii w przybliżeniu sferycznej występuje w warstwach porowatych o dużej miąższości i przepuszczalności udostępnionych do eksploatacji poprzez pojedynczą radialną perforację rur okładzinowych odwiertów na określonej głębokości.

Poniżej rozparzony zostanie przepływ o symetrii sferycznej w obszarze drenażu odpowiadającym interwałowi zmiennej radialnej $r \in [R_w; R_e]$. Przepływ taki odnosić się może zarówno do wydrążonej w środku sfery, półsfery jak i do sferycznego stożka.

W przypadku symetrii sferycznej równanie ciągłości bezźródłowego przepływu płynu przyjmuje postać:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2U\right)\right]=0 \tag{44}$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego jest jak następuje:

$$U(r)=-\frac{E}{r^2} \tag{45}$$

gdzie E jest stałą całkowania.

Nieliniowe dynamiczne równanie przepływu płynu przyjmuje tutaj postać:

$$U+\beta U^3=-\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dr} \tag{46}$$

Po podstawieniu formuły (45) na rozkład prędkości będziemy mieć:

$$\beta\frac{E^3}{r^6}+\frac{E}{r^2}=\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dr} \tag{47}$$

Równanie powyższe uzupełnić można warunkami brzegowymi określającymi wielkość ciśnienia na zewnętrznym ($r = R_e$) i wewnętrznym ($r = R_w$) brzegu obszaru przepływu:

$$P(r)\big|_{r=R_e}=P_e \tag{48}$$

$$P(r)\big|_{r=R_w}=P_w \tag{49}$$

Rozwiązanie ogólne równania (45) przyjmuje postać:

$$-E^3\frac{\beta}{5}\frac{1}{r^5}-E\frac{1}{r}+F=\frac{K}{\mu}P(r) \tag{50}$$

gdzie F jest nową stała całkowania. W celu wyznaczenia stałych całkowania E i F wykorzystajmy warunki brzegowe (48) i (49), które w odniesieniu do rozwiązania (50) dają:

$$-E^3\frac{\beta}{5}\frac{1}{R_e^5}-E\frac{1}{R_e}+F=\frac{K}{\mu}P_e \tag{51}$$

$$-E^3\frac{\beta}{5}\frac{1}{R_w^5}-E\frac{1}{R_w}+F=\frac{K}{\mu}P_w \tag{52}$$

Odejmując powyższe równania stronami otrzymamy równanie sześcienne dla niewiadomej stałej E

$$E^3\frac{\beta}{5}\left(\frac{1}{R_w^5}-\frac{1}{R_e^5}\right)+E\left(\frac{1}{R_w}-\frac{1}{R_e}\right)=\frac{K}{\mu}(P_e-P_w) \tag{53}$$

które można łatwo sprowadzić do postaci `standardowej':

$$E^3+3\frac{5}{3}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^4R_w^4(R_e-R_w)}{R_e^5-R_w^5}E-2\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}(P_e-P_w)=0 \tag{54}$$

Wyróżnik równania sześciennego (54) przyjmuje postać:

$$D=\left[\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}(P_e-P_w)\right]^2+\left[\frac{5}{3}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^4R_w^4(R_e-R_w)}{R_e^5-R_w^5}\right]^3 \tag{55}$$

lub równoważnie:

$$D=\left(\frac{5}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}\right)^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{5}{27}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}\right] \tag{56}$$

Wyróżnik ten jest dodatni, zatem równanie (54) posiada dwa pierwiastki zespolone nie posiadające fizykalnego znaczenia oraz jeden następujący pierwiastek rzeczywisty dany wzorem Cardana:

$$E=\sqrt[3]{\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}(P_e-P_w)+\frac{5}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{5}{27}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}}$$
$$-\sqrt[3]{\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}(P_e-P_w)-\frac{5}{\beta}\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{K}{\mu}\right)^2(P_e-P_w)^2+\frac{5}{27}\frac{1}{\beta}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}} \tag{57}$$

lub w równoważnym zapisie:

$$E=\sqrt[3]{\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}(P_e-P_w)\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{20}{27}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{20}{27}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}}\right] \tag{58}$$

Znając stałą całkowania E drugą stała całkowania F wyznaczymy bezpośrednio z równania (52), które daje:

$$F=\frac{K}{\mu}P_w+E^3\frac{\beta}{5}\frac{1}{R_w^5}+E\frac{1}{R_w} \tag{59}$$

Podstawiając reprezentację (59) do ogólnej formuły (50) na rozkład ciśnienia w rozpatrywanym obszarze przepływu otrzymamy:

$$P(r)=P_w+E\frac{\mu}{K}\left(\frac{1}{R_w}-\frac{1}{r}\right)E+\frac{\beta}{5}\frac{\mu}{K}\left(\frac{1}{R_w^5}-\frac{1}{r^5}\right)E^3 \tag{60}$$

Prędkość filtracji na zewnętrznym brzegu obszaru przepływu będzie:

$$U_e=U(r)\big|_{r=R_e}=-\frac{E}{R_e^2} \tag{61}$$

W przypadku przepływu w obszarze kulistym jego natężenie Q równe jest strumieniowi brzegowej prędkości filtracji U_e przez zewnętrzną powierzchnię sferyczną o promieniu R_e, której wielkość, zgodnie z dobrze znanym wzorem geometrycznym, równa jest czterokrotnej wielkości powierzchni koła o promieniu R_e, tj.:

$$Q=4\pi R_e^2U_e \tag{62}$$

Podstawiając wyrażenia (61) i (58) do formuły (62) otrzymamy:

$$Q=4\pi\sqrt[3]{\frac{5}{2}\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}(P_e-P_w)\frac{R_e^5R_w^5}{R_e^5-R_w^5}}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{20}{27}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{20}{27}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu}{K}\right)^2\frac{1}{(P_e-P_w)^2}\frac{R_e^2R_w^2(R_e-R_w)^3}{R_e^5-R_w^5}}}\right] \tag{63}$$

Jak widać ze wzoru (63) zależność między natężeniem przepływu Q a różnicą ciśnień na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu sferycznego obszaru ruchu płynu P_e-P_w ma postać skomplikowanego wyrażenia potęgowo-pierwiastkowego. W przypadku, gdy wyrażenia pod pierwiastkami kwadratowymi w prawej stronie równania (63) różnią się nieznacznie od jedności, wówczas rozwiązanie to sprowadza się do postaci przybliżonej

$$Q \cong 4\pi \sqrt[3]{5\frac{K}{\mu}\frac{1}{\beta}(P_e - P_w)\frac{R_e^5 R_w^5}{R_e^5 - R_w^5}} \tag{64}$$

Zgodnie ze przybliżonym wzorem (64) natężenie przepływu radialno-symetrycznego Q jest proporcjonalne do pierwiastka sześciennego z różnicy ciśnień $P_e - P_w$ na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu sferycznego obszaru ruchu płynu.

5. Dwuwymiarowy przepływ płaski

W przypadku dwuwymiarowego przepływu płaskiego wektorowe dynamiczne równanie filtracji (16) sprowadza się do układu dwóch równań:

$$U_x + \beta\left(U_x^2 + U_y^2\right)U_x = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dx} \tag{65}$$

$$U_y + \beta\left(U_x^2 + U_y^2\right)U_y = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dy} \tag{66}$$

z których pierwsze odnosi się do kierunku x a drugie do kierunku y. Równania te są wzajemnie sprzężone ze względu na obecność składowych prędkości U_x i U_y w każdym z równań.

Dzieląc pierwsze z powyższych równań przez U_x a drugie przez U_y i odejmując uzyskane w ten sposób równania stronami otrzymamy:

$$U_y = U_x \frac{P_y'}{P_x'} \tag{67}$$

gdzie górny indeks $'$ oznacza różniczkowanie cząstkowe względem zmiennej podanej w dolnym indeksie. Podstawiając wyrażenie (67) do równania (65) i dokonując prostych przekształceń otrzymamy następujące równanie na składową prędkości U_x:

$$U_x^3 + 3\frac{1}{3\beta}\frac{(P_x')^2}{(P_x')^2 + (P_y')^2}U_x + 2\frac{K}{2\beta\mu}\frac{(P_x')^3}{(P_x')^2 + (P_y')^2} = 0 \tag{68}$$

Wyróżnik powyższego równania sześciennego

$$D = \left[\left(\frac{K}{2\beta\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3 \frac{1}{(P_x')^2 + (P_y')^2}\right]\frac{(P_x')^6}{\left[(P_x')^2 + (P_y')^2\right]^2} \tag{69}$$

jest dodatni; posiada ono zatem dwa pierwiastki zespolone nie posiadające znaczenia fizykalnego oraz jeden pierwiastek rzeczywisty dany wzorem:

$$\begin{aligned} U_x = &\sqrt[3]{-\frac{K}{2\mu\beta}\frac{(P_x')^3}{(P_x')^2 + (P_y')^2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2\mu\beta}\right)^2 + \frac{1}{27\beta^3}\frac{1}{(P_x')^2 + (P_y')^2}}\,\frac{(P_x')^3}{(P_x')^2 + (P_y')^2}} \\ &+ \sqrt[3]{-\frac{K}{2\mu\beta}\frac{(P_x')^3}{(P_x')^2 + (P_y')^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2\mu\beta}\right)^2 + \frac{1}{27\beta^3}\frac{1}{(P_x')^2 + (P_y')^2}}\,\frac{(P_x')^3}{(P_x')^2 + (P_y')^2}} \end{aligned} \tag{70}$$

Wzór ten zapisać można w sposób:

$$U_x = -G\left(\frac{K}{\mu}, \beta, (P_x')^2 + (P_y')^2\right)\frac{dP}{dx} \tag{71}$$

gdzie $G(\ldots)$ jest funkcją zdefiniowaną w sposób:

$$G\left(\frac{K}{\mu}, \beta, (P_x')^2 + (P_y')^2\right) = \sqrt[3]{\frac{K}{2\mu\beta}\frac{1}{(P_x')^2 + (P_y')^2}}$$
$$\times\left[\sqrt[3]{\sqrt{1+\frac{4}{27}\frac{\mu^2}{K^2\beta}\frac{1}{(P_x')^2+(P_y')^2}}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{1+\frac{4}{27}\frac{\mu^2}{K^2\beta}\frac{1}{(P_x')^2+(P_y')^2}}-1}\right] \tag{71}$$

zauważmy, że funkcja $G(\ldots)$ jest symetryczna względem wielkości wektorowych i ich składowych i zależy jedynie od parametrów ‘zewnętrznych’ oraz od kwadratu gradientu ciśnienia.

W sposób analogiczny do przedstawionego powyżej uzyskamy:

$$U_y = -G\left(\frac{K}{\mu}, \beta, (P_x')^2 + (P_y')^2\right)\frac{dP}{dy} \tag{71}$$

Zatem, w przypadku dwuwymiarowego przepływu płaskiego nieliniowe dynamiczne równanie filtracji w warstwie porowatej przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{U} = -G\left(\frac{K}{\mu}, \beta, (P_x')^2 + (P_y')^2\right)\operatorname{grad} P \tag{72}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równania ciągłości przepływu (5) otrzymamy:

$$\operatorname{div}\left[G\left(\frac{K}{\mu}, \beta, (P_x')^2 + (P_y')^2\right)\operatorname{grad} P\right] = q \tag{73}$$

Powyższe równanie różniczkowe transportu opisujące dwuwymiarowy nieliniowy przepływ w ośrodku porowatym zawiera jako niewiadomą jedynie przestrzenny rozkład ciśnienia w warstwie porowatej $P(x,y)$. Równanie to, adekwatne dla płynów nieściśliwych, pomimo istniejących nieliniowości jest typu eliptycznego. Natomiast dla płynów ściśliwych oraz w przypadku zależności porowatości ośrodka od ciśnienia równanie transportu będzie typu parabolicznego.

Ze względu na istniejące nieliniowości równana te mogą być rozwiązane jedynie metodami numerycznymi.

Podziękowanie

Praca niniejsza zrealizowana została w ramach prac statutowych Instytutu Mechaniki Górotworu PAN, nr K II/ZV/P1/2008, Zadanie V *Modelowanie przepływów w ośrodkach porowatych z uwzględnieniem efektów nieliniowych oraz oddziaływań międzyfazowych*, zakres badań: *Modelowanie przepływu w ośrodku porowatym z nieliniowym prawem filtracji.*

Literatura

ARIAULT J.L., (1980): *Dynamic Behaviour of Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid*, International Journal of Engineering Sciences, **18**, 775.

ARIAULT J.L., SANCHEZ–PALENCIA E., (1977): *Etude du comportment macroscopique d'un mileu poreux sature deformable*, Journal de Mechanique, **16**, 575.

BEAR J., (1972): *Dynamics of Fluids In Porous Media*, American Elsevier, New York.

BURKE S.P., PLUMMER W.B., (1928): *Gas Flow through Packed Columns*, Industrial and Engineering Chemistry, **20**, 1196.

CIEŚLICKI K., LASOWSKA H., (1995): Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, **43**, 423.

DARCY H., (1856): *Les fountaines publiques de la ville de Dijon*, Dalmont, Paris.

ENE H.I., SANCHEZ–PALENCIA E., (1975): *Equations de phenomenes de surface pour l'ecoulement dans un modele de mileux poreux*, Journal de Mechanique, **14**, 73.

FORCHHEIMER P., (1901): *Wasserbewegung durch Boden*, Zeitschrift fur Vereinigung Deutschen Ingenieuren, **45**, 1782.

FORCHHEIMER P., (1914): *Hydraulik*, I Aulf., Teubner, Leipzig – Berlin.

FORCHHEIMER P., (1930): *Hydraulik*, III Aulf., Teubner, Leipzig – Berlin.

HANOURA A.A., BARENDS F.B.J., (1981): *Non-Darcy Flow. A State of the Art*, in *Flow and Transport in Porous Media*, edited by A. VERRUIJT and F.B.J. BARENDS, Balkema, Rotterdam.

KRÖBER C., (1884): *Versuche uber die Bewegung des Wassers durch Sandschichten*, Zeitschrift fur Vereinigung Deutschen Ingenieuren, **28**, 593.

MIEI C.C., ARIAULT J.L., (1991): *Effects of Weak Inertia on Flow through a Porous Medium*, Journal of Fluid Mechanics, **222**, 647.

SCHEIDEGGER A.E., (1960): *The Physics of Flow through Porous Media*, University of Toronto Press, Toronto.

SMEREKER O., (1878a): *Entwickelung eines Gesetzes fur den Wilderstand bei der Bewegung Grundwasser*, Zeitschrift fur Vereinigung Deutschen Ingenieuren, **22**, 117.

SMEREKER O., (1878b): *Entwickelung eines Gesetzes fur den Wilderstand bei der Bewegung Grundwasser*, Zeitschrift fur Vereinigung Deutschen Ingenieuren, **22**, 193.

SMEREKER O., (1879): *Das Grunwasser und seine Verwendung zu Wasserversorgungen*, Zeitschrift fur Vereinigung Deutschen Ingenieuren, **23**, 347.

WHITE A.M., (1935): Transactions of the American Institute of Chemical Engineers, **31**, 190.

ZICK A.A., HOMSY G.M., (1982): *Stokes flow through Periodic Array of Spheres*, Journal of Fluid Mechanics, **115**, 13.

The Modelling of Non-Linear Flows through Porous Materials

Abstract

The paper concerns the analysis of the incompressible fluid motion through porous media described by a non-linear dynamic relationship between the superficial flow velocity U and pressure drop per unit of distance J. It has been assumed that the dynamic relationship describing fluid motion must be valid for one- and multidimensional fluid motions, and moreover, it must be invariant with respect to the reflection of the co-ordinate system. U vs. J relationships encountered in the literature and violating the requirements mentioned above have been rejected. On the other hand, applying the Weierstrass approximation theorem with respect to U vs. J relationsip, and taking into account the results obtined from the homogenisation theory the author has assumed the third order relationsip between U and J represented by Eqs. (13) and (14). One-dimensional staighforward, cylindrical and spherical flows have been analysed. For the well neighbouring zone the pressure distribution and the relationship between well production and and pressure difference have been determined. In a similar way, the pressure distribution and the relationship between pressure drop and flow rate have been determined for spherical flow. Moreover, the transport equation for non-linear two-dimensional flow in a porous layer has been obtained. Owing to non-linearities the transport eqution may only be solved by means of the numerical methods.

Keywords: low Reynolds numbers hydrodynamics, flows through porous materials, non-Darcy flows

Recenzent: Prof. dr hab. inż. *Janusz Roszkowski*, Akademia Górniczo-Hutnicza