

Zastosowanie złożonych wymuszeń fali temperaturowej w absolutnej metodzie pomiaru prędkości przepływu gazów

JAN KIELBASA, ELŻBIETA POLESZCZYK, ANDRZEJ RACHALSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN, ul. Reymonta 27; 30-059 Kraków

Streszczenie

Opracowano metodę absolutnego pomiaru prędkości przepływu i dyfuzyjności cieplnej gazu z zastosowaniem złożonej fali cieplnej, w zakresie małych prędkości gazu. Metoda polega na analizie zależności przesunięcia i amplitudy fazy składowych harmonicznym fali cieplnej w funkcji częstotliwości. Prędkość przepływu gazu i jego dyfuzyjność cieplną wyznacza się metodą estymacji nieliniowej z zależności funkcyjnej przesunięcia fazy od częstotliwości. W rzeczywistych warunkach pomiaru, gdy wartości obarczone są niedokładnościami, wyznaczone wartości prędkości przepływu i dyfuzyjności cieplnej wymagają potwierdzenia ich poprawności; w tym celu zastosowano analizę amplitud składowych fali cieplnej.

Słowa kluczowe: pomiar prędkości przepływu, termoanemometria, fale cieplne

1. Wstęp

Idea pomiaru prędkości przepływu gazu metodą fal cieplnych polega na określeniu czasu przelotu rozchodzącej się w płynącym gazie fali cieplnej, pomiędzy dwoma punktami przestrzeni. Generowana w przepływającym gazie fala cieplna jest znacznikiem unoszonym przez przepływające medium. W praktyce mierzy się przesunięcie fazy fali występujące na znanej odległości. Z uwagi na występowanie zjawiska dyfuzji cieplnej, tylko w ściśle określonych warunkach prędkość rozchodzenia się fali można uznać za równą prędkości przepływu gazu [1, 2], co implikuje ograniczenie stosowania metody jeżeli chodzi o zakres mierzonych prędkości [3]. W prowadzonych w ostatnio pracach zmodyfikowano metodę fal cieplnych przez zastosowanie fali złożonej z przebiegów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach i pomiarze prędkości na podstawie liniowej zależności pomiędzy przesunięciem fazy fali a jej częstotliwością [4, 5]. Zastosowanie fali złożonej umożliwiło skrócenie czasu pomiaru, oraz rozszerzenie zakresu pomiarowego metody w kierunku mniejszych prędkości przepływu [6]. Analiza fali złożonej w funkcji częstotliwości umożliwia skorzystanie z dokładnych rozwiązań równania propagacji fali cieplnej podanych przez Kielbasę [1], z wykorzystaniem nie tylko przesunięcia fazowego, ale również amplitudy składowych harmonicznym fali.

2. Opis metody

Zjawisko propagacji fali cieplnej w płynącym gazie opisuje równanie bilansu ciepła:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \Delta \theta - U_G \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{Q(t)}{T_0 \rho c} \quad (1)$$

gdzie

θ – zredukowana temperatura gazu jest stosunkiem chwilowej temperatury T fali cieplnej do temperatury „zimnego” gazu T_0 : $\theta = \frac{T}{T_0}$,

- U_G – prędkość gazu opływającego źródło,
 c – ciepło właściwe gazu,
 κ – przewodnictwo temperaturowe gazu,
 ρ – gęstość gazu,
 $Q(t)$ – zależna od czasu intensywność źródła fali cieplnej.

Szczegółowe założenia, jakie poczyniono przy wyprowadzaniu powyższego równania oraz warunki, w jakich można stosować powyższe równanie zostały przedyskutowane we wcześniejszych pracach poświęconych pomiarom prędkości przepływu za pomocą metody fal cieplnych [1, 2, 3].

Rozwiązanie równania (1), dla nieskończonego źródła liniowego o intensywności opisanej zależnością $Q = Q_0 \exp(-i\omega t) \delta(x-0) \delta(y-0)$, (ω oznacza częstość fali), jest następujące [1]:

$$\theta(x, y, t) = \frac{Q_0(t)}{2\pi T_0 \kappa \rho c} \exp\left(\frac{U_G x}{2\kappa} - i\omega t\right) \sqrt{\frac{\pi \kappa}{r \sqrt{U_G^2 + i4\kappa\omega}}} \exp\left(-\frac{r}{2\kappa} \sqrt{U_G^2 + i4\kappa\omega}\right) \quad (2)$$

Prędkość U_G jest skierowana wzdłuż osi OX , natomiast r oznacza odległość od osi OZ . Z powyższego równania otrzymujemy wyrażenie na amplitudę fali:

$$\Theta(x, r, \omega, \kappa, U_G) = \frac{Q_0}{2\pi T_0 \kappa \rho c} \sqrt{\frac{\pi}{U_G r}} \left[1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{U_G^4}\right]^{-1/8} \exp\left[\frac{U_G}{2\kappa} \left(x - r \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{U_G^4}}\right)}\right)\right] \quad (3)$$

oraz na przesunięcie fazy, jakie występuje na drodze Δx :

$$\Delta\phi(\Delta x, \omega, \kappa, U) = \frac{U_G \Delta x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{U_G^4}} - 1\right)} \quad (4)$$

Powyższego wzoru nie da się zastosować do wyznaczenia prędkości przepływu gazu U_G , gdyż występuje w nim druga nieznaną wielkość κ – przewodnictwo temperaturowe gazu. Gdy jednak zachodzi:

$$\frac{4\kappa\omega}{U_G^2} \ll 1 \quad (5)$$

to uwzględniając dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia wewnętrznego pierwiastka po prostych przeliczeniach otrzymujemy:

$$\Delta\phi = \frac{\omega \Delta x}{U_G} \quad (6)$$

i z tej zależności korzystamy przy wyznaczaniu prędkości U_G . Związek (6) oznacza, że przyjmujemy (z pewną dokładnością), iż prędkość fali cieplnej jest równa prędkości gazu. Nierówność (5) określa granicę stosowności takiego przybliżenia; niedokładność zależy jak widać od prędkości i przewodnictwa temperaturowego gazu oraz częstotliwości fali. Zastosowanie fali złożonej pozwala na skorzystanie z (4) czyli dokładnego związku pomiędzy przesunięciem fazy a prędkością.

Dla składowych harmonicznych złożonej fali dysponujemy zbiorem wyznaczonych przesunięć fazy $\Delta\phi_i$:

$$\Delta\phi_i(\Delta x, \omega_i, \kappa, U) = \frac{U_G \Delta x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega_i^2}{U_G^4}} - 1\right)} \quad (7)$$

do których można dopasować metodą najmniejszych kwadratów (4) i wyznaczyć nieznanne parametry U_G oraz κ . Tak więc dysponując przesunięciami fazowymi dla fal o różnych częstotliwościach możemy określić równocześnie prędkość gazu i jego przewodnictwo temperaturowe.

Do wyznaczenia prędkości gazu i przewodnictwa temperaturowego wykorzystać można również równanie 3 na amplitudę fali. W tym przypadku wygodniej jest skorzystać ze stosunku amplitud harmonicznych

fali o jednakowych częstotliwościach. Ponieważ zadane na nadajniku amplitudy składowych harmonicznym fali posiadają różną amplitudę, której dokładne wyznaczenie jest kłopotliwe, dlatego używamy wielkości niezależnej od amplitudy nadajnika, która opisuje zmianę amplitudy w funkcji drogi przebytej przez falę i jej częstotliwości. Stosunek amplitud odpowiednich harmonicznym sygnału na detektorach u położonych w odległości x_1 oraz x_2 od źródła będzie równy:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2}(x_1, x_2, \omega, \kappa, U_G) = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \exp \left[\frac{U_G}{2\kappa} (x_1 - x_2) \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{U_G^4}} \right)} \right) \right] \quad (8)$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu dostajemy:

$$\ln \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{U_G}{2\kappa} (x_1 - x_2) + \frac{U_G}{2\kappa} (x_1 - x_2) \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16\kappa^2 \omega^2}{U_G^4}} \right)} \right) \quad (9)$$

Wprowadzając podstawienia:

$$a = \frac{U_G}{2\kappa} \quad (10)$$

$$b = U_G \quad (11)$$

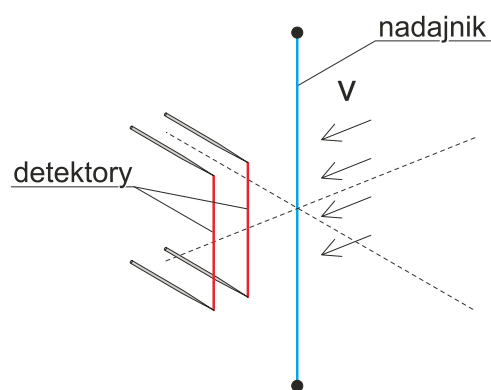
można logarytm stosunku amplitud przedstawić w postaci:

$$\ln \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} + a (x_1 - x_2) \left[1 + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\omega}{ab} \right)^2} \right)} \right) \right] \quad (12)$$

Do wyznaczonych z pomiaru i analizy fourierowskiej par wartości (ω_i) , $\ln \frac{\Theta_1(\omega_i)}{\Theta_2(\omega_i)}$ dopasowujemy metoda najmniejszych kwadratów funkcję z równania (12) i znajdujemy wartości parametrów a i b a następnie U_G oraz κ .

2. Badania eksperymentalne

Badania przeprowadzono w tunelu aerodynamicznym, w powietrzu w temperaturze pokojowej. Do wytwarzania fal cieplnych używano sterowanego cyfrowo anemometru, który umożliwia zadawanie współczynnika nagrzania nadajnika zgodnie z założonym w czasie przebiegiem. W skład stanowiska pomiarowego wchodził sterowany komputerowo tunel wyposażony w sterowany stolik do pozycjonowania sond w przepływie oraz komputerowy układ akwizycji i przetwarzania danych. Zakres badanych prędkości przepływu wynosił od 0,10 do 1,0 m/s. Zastosowano nadajnik wolframowy o średnicy $8 \mu\text{m}$ i długości 7 mm, oraz detektory wolframowe o długości 3 mm i średnicy $5 \mu\text{m}$, które umieszczono w konfiguracji równoległej, pionowo w płaszczyźnie prostopadłej do osi tunelu, a tym samym prostopadle do wektora prędkości (rys. 1). Odległość między detektorami wynosiła 2 mm, a między pierwszym detektorem a nadajnikiem 5 mm. Na nadajniku stosowano sygnały o częstotliwości podstawowej ω_0 równej 5, 10 i 20 Hz złożone z przebiegów sinusoidalnych

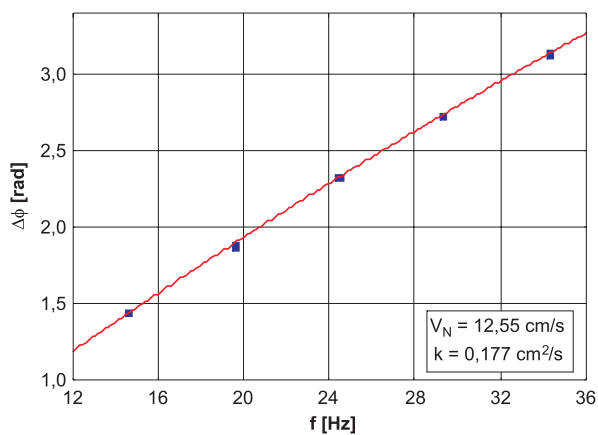


Rys. 1. Konfiguracja przestrzenna nadajnika i detektorów w przepływie

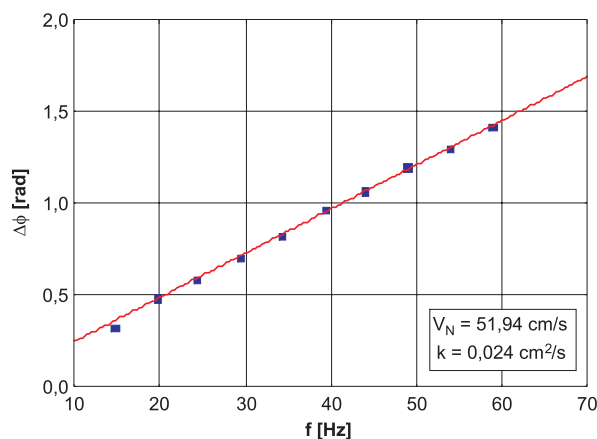
o częstotliwościach od $2\omega_0$ do $12\omega_0$. Podstawowa wartość współczynnika nagrzania nadajnika wynosiła 1,7, a amplituda sygnału $\pm 20\%$. Do analizy widma sygnałów zastosowano algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT), natomiast do obliczania przesunięcia fazy oraz amplitudy poszczególnych harmonicznych użyto dyskretnych szeregów Fouriera.

3. Wyznaczanie prędkości przepływu gazu

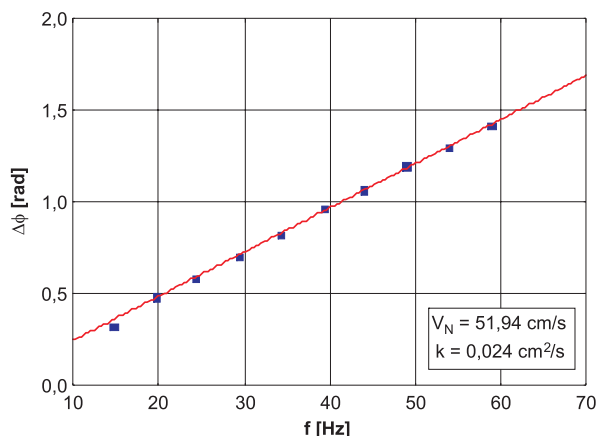
Na rys. 2, 3 i 4 przedstawiono wykresy dopasowanych krzywych z równ. 4 do punktów pomiarowych oraz otrzymane stąd wartości prędkości i dyfuzyjności gazu. Zastosowano tu falę złożoną o wymuszeniu: $k(t) = \sin(30\pi t) - 2\sin(40\pi t) + \sin(50\pi t) + \sin(60\pi t) + \sin(70\pi t) + \sin(80\pi t) + \sin(90\pi t) + \sin(100\pi t) - \sin(120\pi t)$. W tabeli 1 przedstawiono wartości prędkości gazu i wartość przewodnictwa temperaturowego wyznaczone tą metodą oraz wartości prędkości otrzymane za pomocą dopasowania liniowego przesunięcia fazy w funkcji częstotliwości zgodnie ze wzorem (6). Dla prędkości 12 cm/s wartości prędkości otrzymane za pomocą tych metod różnią się między sobą, co wynika z wcześniejszych rozważań na temat stosowania metody fal do pomiaru prędkości. Dla prędkości przepływu 50 cm/s otrzymane wartości prędkości są identyczne. Dla prędkości 90 cm/s zgodność wyników nie jest tak dobra jak dla 50 cm/s, co spowodowane jest większym rozrzutem punktów pomiarowych.



Rys. 2. Zależność przesunięcia fazy składowych harmonicznych w funkcji częstotliwości



Rys. 3. Zależność przesunięcia fazy składowych harmonicznych w funkcji częstotliwości



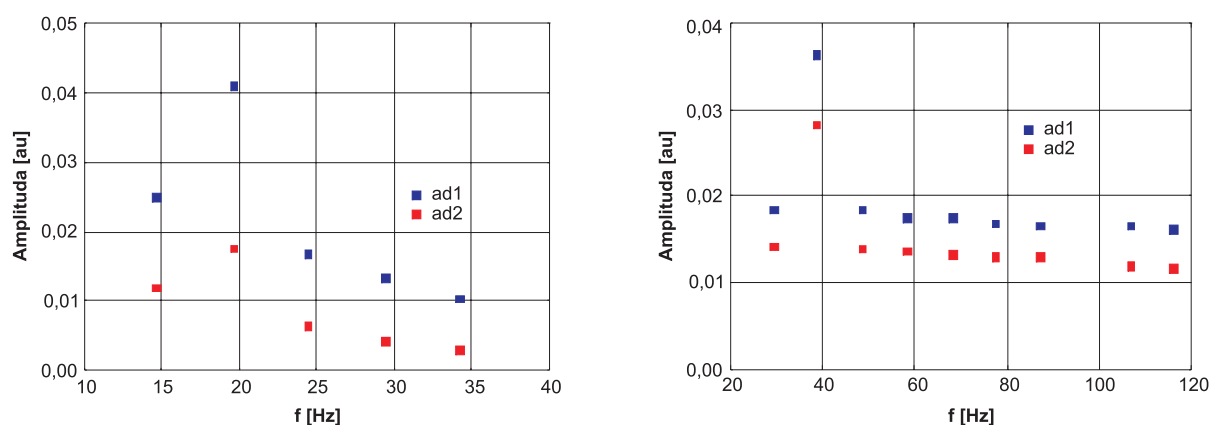
Rys. 4. Zależność przesunięcia fazy składowych harmonicznych w funkcji częstotliwości

Tab. 1. Porównanie otrzymanych wartości prędkości przepływu i przewodnictwa temperaturowego powietrza

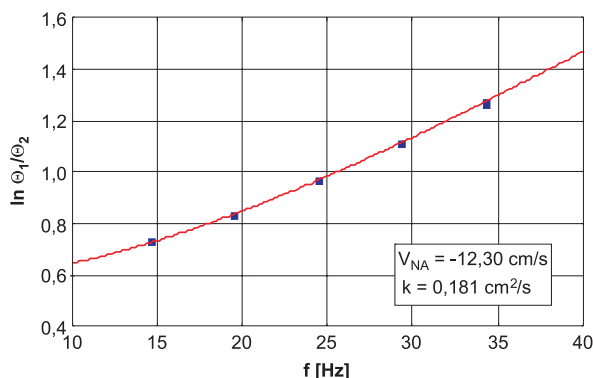
V [cm/s]	12	50	90
V_N [cm/s]	12,55	51,94	87,67
σ_N [cm/s]	0,10	0,24	1,206
V_{NA} [cm/s]	12,30		
V_L [cm/s]	14,18	51,94	92,47
σ_{VL} [cm/s]	0,10	0,22	0,93
κ [cm ² /s]	0,177	0,024	2,49
σ_κ [cm ² /s]	0,010	1,176	0,273
κ_A [cm ² /s]	0,181		

Natomiast obliczone wartości przewodnictwa temperaturowego wskazują, że metoda ta w odniesieniu do tej wielkości pozwala uzyskać prawidłowy wynik tylko dla małych prędkości. Dla prędkości 12 cm/s otrzymujemy wartość 0,176 cm²/s, co jest zgodne z danymi dla powietrza w temperaturze pokojowej [7].

Dzieje się tak dlatego, że czułość przesunięcia fazowego określonego wzorem (4) na wartość przewodnictwa temperaturowego maleje ze wzrostem prędkości (co z drugiej strony, pozwalało skorzystać ze wzoru (6) do wyznaczenia prędkości). Gdyby wyznaczone wartości przesunięcia fazowego były określone bardzo dokładnie, to estymacja funkcji określonej wzorem (4) dałaby prawidłowe wyniki w odniesieniu do przewodnictwa temperaturowego, jednak w praktyce nie jest to możliwe. Pojawia się więc zagadnienie weryfikacji otrzymanych wyników. W tym celu posłużono się analizą amplitudy składowych harmonicznych. Na rys. 5 przedstawiono zależność amplitudy składowych harmonicznych fali cieplnej na detektorach w funkcji częstotliwości. Amplituda maleje ze wzrostem częstotliwości, niemonotoniczność przebiegu jest tu spowodowana zastosowaniem na nadajniku fali dwukrotnie większej amplitudy. Jak widać, wyraźna zależność od częstotliwości występuje dla 12 cm/s. Pozwala to skorzystać ze wzoru na amplitudę (równ. (3)) do wyznaczenia prędkości i przewodnictwa temperaturowego gazu. Na rys. 6 przedstawiono wyniki estymacji prędkości i przewodnictwa temperaturowego z dopasowania punktów pomiarowych do funkcji z równ. (12). Otrzymane wyniki są zgodne z wartościami wyznaczonymi z dopasowania przesunięcia fazowego. Dla większych prędkości rozrzut amplitudy i jej słaba zależność od częstotliwości uniemożliwia poprawne wyznaczenie prędkości i przewodnictwa temperaturowego tą metodą.



Rys. 5. Amplituda składowych harmonicznych sygnału na detektorach dla prędkości przepływu 12 cm/s i 90 cm/s



Rys. 6. Zależność logarytmu stosunku amplitudy składowych harmonicznnych w funkcji częstotliwości

5. Wnioski

Zastosowanie dokładnego wyrażenia na przesunięcie fazowe pozwala rozszerzyć zakres wyznaczanych prędkości przepływu gazu w stronę małych wartości. Dodatkowo dla małych prędkości możliwe jest równoczesne wyznaczenie przewodnictwa temperaturowego gazu. Weryfikacja otrzymanych wartości przewodnictwa temperaturowego wymaga posłużenia się analizą amplitudy składowych harmonicznnych fali.

Praca została wykonana w roku 2010 w ramach prac statutowych realizowanych w IMG PAN w Krakowie, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] Kielbasa J. *Fale cieplne w metrologii powolnych przepływów*. Wyd. AGH, Kraków, (1975).
- [2] Kielbasa J. *Pomiar prędkości przepływu ustalonego metodą fal cieplnych*. Archiwum Górnictwa 2005. Vol. 50, nr 2, 191-208.
- [3] Kielbasa J. et al. *Eksperymentalna weryfikacja wielokanałowego termoanemo-metrycznego systemu pomiarowego jako anemometru z falą cieplną*. Prace Instytutu Mechaniki Górniczej PAN, 2004, T. 6, Nr 3-4, 205-216.
- [4] Gawor M., Rachalski A. *Implementacja i badania parametrów metrologicznych różnicowego anemometru z falą cieplną w adaptacyjnym komputerowym systemie termoanemometrycznym*. Prace Instytutu Mechaniki Górniczej PAN 2005, T. 7, Nr 1-2, 87-99.
- [5] Rachalski A. *High Precise Anemometer with Thermal Wave*, Rev. Sci. Instrum. 77(2006).
- [6] Rachalski A. *System wzorcowego pomiaru prędkości z zastosowaniem algorytmu analizy wymuszeń złożonych*. Prace Instytutu Mechaniki Górniczej PAN 2009, T. 11, Nr 1-4, 207-214.
- [7] Raznjevic K. *Tablice cieplne z wykresami*. WNT, Warszawa 1966.

Application of complex excitations in form of temperature waves to the absolute method of gas flow velocity measurements

Abstract

The method is developed enabling the absolute measurements of flow velocity and thermal diffusivity of gases, using complex thermal waves, in a small velocity range. The method is based on the relationship between the phase shift and amplitude of the thermal wave's harmonic components in the function of frequency. Gas flow velocity and its thermal diffusivity are obtained by nonlinear estimation of the relationship between the phase shift and frequency. In real life conditions, where measurement values involve certain inaccuracy, the adequacy of thus obtained flow velocity and thermal diffusivity values has to be confirmed. For that purpose, the authors applied the analysis of amplitudes of the thermal wave's components.

Keywords: flow velocity measurement, hot-wire anemometry, thermal waves