

# Model hybrydowy złoża porowatego

PRZEMYSŁAW SKOTNICZNY, MARIUSZ R. SŁAWOMIRSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN; ul. Reymonta 27, 30-059 Kraków

## Streszczenie

Ruch płynu (cieczy lub gazu) w swobodnej strudze gazu płynącej ponad przepuszczalnym złożem porowatym posiada skomplikowany charakter ze względu na istnienie strefy przejściowej między obydwoma wspomnianymi tu podobszarami. W każdym z nich ruch płynu posiada odmienny charakter (przepływ turbulentny w strudze swobodnej vs. przepływ pełzający w przestrzeni porowej). Tym samym efekt występowania niezerowej prędkości na granicy ośrodków, zwanej prędkością poślizgu jest trudny do precyzyjnego opisanie z powodu istotnych różnic w równaniach ruchu opisujących przepływ płynu w strudze swobodnej i w złożu porowatym. Z drugiej jednak strony własności przepływu w jednej ze stref wpływają w sposób istotny na strefę drugą i vice versa, a ich wzajemny wpływ nie może być pominięty. Klasyczne ujęcie polegające na modelowaniu ruchu płynu z wyraźnym podziałem na przepływ w obszarze zewnętrznym (struga swobodna) i wewnętrznym (przepływ filtracyjny) z uwagi na niedoskonałość dostępnych modeli prowadzi do wyników niezgodnych z danymi doświadczalnymi. Dlatego też w przedstawionym artykule autorzy koncentrują się na koncepcji numerycznego modelu hybrydowego złoża porowatego, zbudowanego z kulek jednakowej średnicy, dla którego łatwo można określić wartości przepuszczalności i porowatości. Idea modelu opiera się na wprowadzeniu dodatkowej strefy łączącej geometrycznie przepływ zewnętrzny z przepływem wewnętrznym i odnoszącej się do pojedynczego rzędu równomiernie rozmieszczonych wzdłuż złoża kulek o znanej średnicy, dla której ruch opisywany jest równaniami Naviera-Stokesa, a w przypadku przepływu turbulentnego równaniem Reynoldsa. Z kolei strefa wewnętrzna modelowana jest jako klasyczny obszar przepływu filtracyjnego. Rząd równomiernie rozłożonych, nie stykających się ze sobą kulek spełnia rolę turbulizatora przepływu wprowadzając tym samym brakujące wartości produkcji oraz dyssypacji energii kinetycznej turbulencji w pobliżu tak stworzonej półprzepuszczalnej płaszczyzny wirtualnego rozdziału. W wyniku takiego zabiegu wielkościami brzegowymi dla właściwego w obrębie złoża porowatego opisu równaniem Forchheimera są wartości prędkości oraz rozkładu ciśnień uzyskane z rozwiązania równania Naviera-Stokesa lub równania Reynoldsa. Przeprowadzone pomiary doświadczalne wykazały zgodność z obliczeniami numerycznymi przeprowadzonymi przez autorów według modelu *scale adaptative simulation* (SAS).

**Słowa kluczowe:** turbulencja, poślizg na brzegu, model SAS, przepływ w ośrodku porowatym, modele hybrydowe

## 1. Sformułowanie problemu

W przepływie stycznym płynu rzeczywistego nad złożem porowatym na granicy dwóch ośrodków, analogicznie do przepływu płynu w pobliżu nieprzepuszczalnej przegrody tworzy się charakterystyczny obszar, który można nazwać strefą przejściową. W przeciwieństwie do klasycznego zagadnienia mechaniki płynów opisującego tworzenie się warstwy granicznej w pobliżu nieprzepuszczalnej powierzchni, w przypadku obszaru na granicy ośrodka porowatego i omywającej go strugi płynu występuje warunek niezerowej wartości składowej stycznej wektora prędkości – tak zwana prędkość poślizgu  $u_b$ . Znajomość tej wartości na równi ze znajomością rozkładu prędkości w strudze swobodnej i w materiale porowatym stanowi podstawę właściwego określenia warunków wymiany zarówno masy jak i energii pomiędzy złożem porowatym a obmywającą go strugą płynu.

Badania mające na celu określenie powyższych parametrów trwają od ponad 40 lat. Prekursorem w dziedzinie eksperymentalnego określenia prędkości poślizgu  $u_b$  oraz rozkładu prędkości nad złożem porowatym uznaje się Beaversa i Josepha (1967). Ich nieskomplikowana koncepcja oparta na jednym skalarnym parametrze opisującym zjawisko poślizgu, a zarazem stanowiącym sprzężenie między równaniami opisującymi przepływ w swobodnej strudze oraz w ośrodku porowatym okazała się być dalece niewystarczająca.

Dotyczy to zwłaszcza sytuacji, gdy szybki przepływ nad złożem posiada charakter silnie zturbulizowanej strugi swobodnej. W takim przypadku rozbieżności między koncepcją skalarnej prędkości poślizgu a wynikami pomiarów doświadczalnych stają się drastyczne.

Sytuacja taka spowodowała konieczność wprowadzenia głęboko sięgających modyfikacji do opisu zjawiska przepływu stycznego płynu nad złożem porowatym.

W rezultacie celem przedstawianej tu pracy było sformułowanie alternatywnego modelu złoża porowatego oraz określenie jego parametrów w ten sposób, aby przystosować go do obliczeń numerycznych obejmujących zagadnienie stycznego przepływu płynu nad niejednorodną a zarazem przepuszczalną powierzchnią i uzyskać przy tym rezultaty zgodne z wynikami pomiarów doświadczalnych.

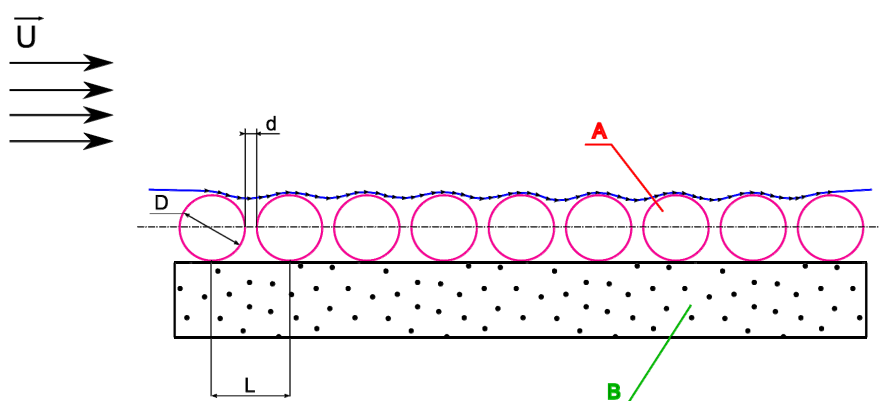
## 2. Koncepcja przepływ strugi swobodnej gazu nad złożem porowatym

Rozważane zagadnienie dotyczy przepływu turbulენტnej strugi swobodnej nad złożem utworzonym przez ośrodek porowaty zbudowany z ziaren gruboporowych, tj. ziaren o znacznych średnicach. Ruch płynu, tj. cieczy lub gazu w takim ośrodku różni się znacznie od przepływu w drobnoskalowej przestrzeni porowej skał porowatych, gdyż zjawiska na granicach faz ciało stałe – płyn nie odgrywają tutaj żadnej roli, lub też ich znaczenie jest marginalne i może być ono pominięte.

W przypadku, gdy obszar strugi swobodnej nie jest ograniczony gładką, sztywną ścianką, lecz obszarem o złożonej topologii, w którym ruch płynu jest również możliwy, lecz opory ruchu są znacznie większe niż w strudze swobodnej, mamy dwa wyraźnie różniące się obszary przepływu: obszar przepływu szybkiego, często silnie zturbulizowanego w strudze swobodnej oraz obszar przepływu znacznie wolniejszego w przestrzeni porowej.

Istotą omawianej koncepcji jest rozważenie wpływu przepływu turbulენტnego generowanego w strefie ruchu swobodnego przez pierwszą warstwę utworzoną z periodycznie rozmieszczonych wzdłuż złoża nie stykających się ze sobą kulek, na przepływ wewnątrz złoża traktowanego jako jednorodny ośrodek porowaty opisany równaniem Forchheimera.

Idea stycznego przepływu płynu nad modelem hybrydowym złoża porowatego jest przedstawiona na rys. 1. Na rysunku tym obszar A stanowi wyodrębnioną warstwę kulek będącą geometrycznym 'łącznikiem' pomiędzy przepływem swobodnym, opisanym równaniem Reynoldsa, a przepływem w ośrodku porowatym; z kolei obszar B to właściwe złożo porowate określone parametrami przepuszczalności  $k$  oraz porowatości  $\phi$ . W obszarze B ruch płynu jest opisany równaniem Forchheimera. Linia prądu leżąca w najbliższym sąsiedztwie kulek w obszarze A została zaznaczona linią falistą.

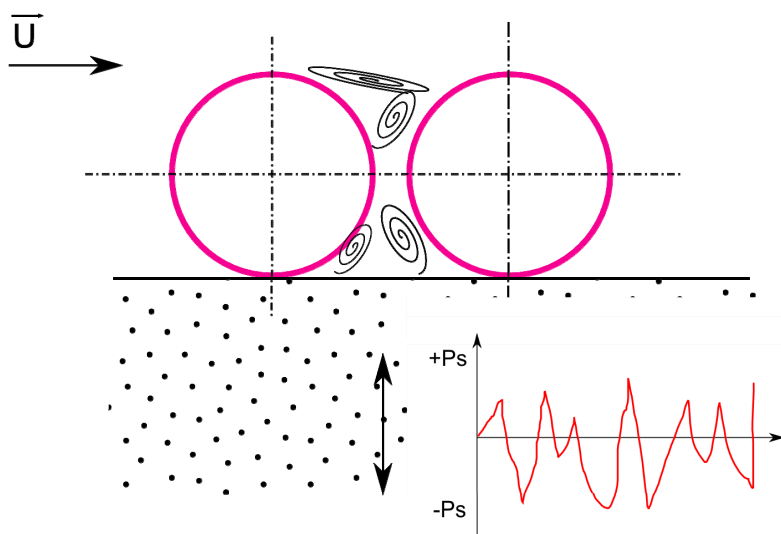


Rys. 1. Idea hybrydowego modelu złoża porowatego

Przepływ płynu w każdym z obszarów A i B (rys. 1) podlega nieco innym prawidłowościom, a zatem odmienne są odpowiadające im równania ruchu. Z drugiej jednak strony, przepływy te nie są od siebie izolowane, lecz ich wzajemne oddziaływanie jest wyraźnie widoczne i nie może być ono pominięte. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że w przeciwieństwie do nieprzepuszczalnych ścianek, warunki brzegowe dla prędkości w równaniach ruchu zarówno dla jednego jak i dla drugiego systemu odnoszące się do granicy między nimi nie mogą być zerowe. Przepływ turbulენტny w strudze swobodnej zintensyfikowany

w pobliżu strefy A z powodu występowania znacznych nierówności powierzchni może powodować zmienne wartości parametrów przepływu, takich jak składowe wektora prędkości, intensywność turbulencji, obszar i zasięg stref recyrkulacji strugi płynu w kolejnych przestrzeniach L pomiędzy kulkami pierwszej warstwy. Zmiana omawianych parametrów może z kolei wpłynąć na występowanie gradientów ciśnień statycznych, które stanowią ‘siłę napędową’ penetracji złoża przez turbulентnie przepływający płyn. Ponadto, w przypadku istnienia przepływów niestacjonarnych zmienne wartości parametrów przepływowych w przestrzeniach L mogą dodatkowo generować fluktuacje.

Strumień swobodny przepływający przy liczbie Reynoldsa rzędu setek tysięcy nad zbudowanym z modelowych kulek złożem porowatym pokazanym na Rys. 1 i 2 będzie niemal zawsze turbulentny. Jego ruch opisany będzie równaniem Reynoldsa przedstawionym w rozdziale następnym.



Rys. 2. Przykład wpływu niestacjonarności ruchu strugi swobodnej na powstawanie wirów recyrkulacyjnych w strefie L

Natomiast przepływ w złożu porowatym będzie ruchem laminarnym, *quasi*-laminarnym, lub słabo zturbulizowanym, typu *creeping flow*. Przepływ w ośrodku porowatym o drobnoskalowych wymiarach porów podlega dobrze znanemu prawu Darcy’ego, zgodnie z którym wektor prędkości filtracji  $w_i$  jest wprost proporcjonalna do gradientu ciśnienia  $P$  i odwrotnie proporcjonalna do lepkości płynu  $\mu$ , tj.:

$$w_i = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (1)$$

gdzie  $x_i$  jest wektorem położenia, a  $k$  jest przepuszczalnością środka porowatego.

Ze względu na spore rozmiary porów złoża spodziewać się można znacznych odchyłek od formuły Darcy’ego. W takiej sytuacji ruch płynu w złożu opisać można bardziej precyzyjnie nieliniowym równaniem Forchhaimera:

$$(1 + \mathcal{F}|w_i|) w_i = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (2)$$

gdzie  $\mathcal{F}$  jest dodatkowym, obok przepuszczalności  $k$ , parametrem materiałowym ośrodka porowatego.

Tak więc ruch płynu w całym obszarze opisany jest przy pomocy dwóch różnych formuł odnoszących się do dwóch fizycznie różnych podobszarów przepływu. Podobszary te nie są jednak od siebie oddzielone – wprost przeciwnie jeden z nich oddziałuje w sensie hydrodynamicznym na drugi i *vice versa*, mamy tu zatem do czynienia z typowym sprzężeniem zwrotnym. Dlatego też model z wbudowanym hydrodynamicznym sprzężeniem między wspomnianymi podobszarami można uznać za model typu hybrydowego.

### 3. Turbulentny ruch gazu

Wielokrotnie przeprowadzane obserwacje empiryczne wskazują, że ruch powietrza, a także innych gazów odbywający się w niezbyt dużym oddaleniu od sztywnych ścianek nieprzepuszczalnych ma najczęściej charakter przepływu turbulentnego.

Przepływ turbulentny jest niestatecznym ruchem silnie wirowym, dla którego charakterystyczne jest występowanie wirów o rozmaitych skalach wielkości, od porównywalnych z wymiarami obszaru, w którym odbywa się przepływ do mikrowirów o najmniejszej możliwej skali makroskopowej. Wiry wielkoskalowe są nośnikami największej energii kinetycznej; nie dyssypują jej jednak, lecz przekazują do wirów o mniejszej skali, te z kolei do wirów o jeszcze mniejszej skali i tak kolejno, wskutek czego w wirach o najmniejszej skali energia ulega finalnej dyssypacji i zamianie jej na ciepło (Landau i Lifshitz, 1944; Hinze, 1959; Elsner, 1987).

Badania doświadczalne przeprowadzone jeszcze w XIX wieku przez Reynoldsa (1883) i jego następców wykazały, że rozwój turbulencji zależy od wartości liczby kryterialnej, zwanej obecnie liczbą Reynoldsa  $Re$ , zdefiniowanej w sposób:

$$Re = \frac{\rho \bar{u} L}{\mu} \quad (3)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu,  $\bar{u}$  – jego prędkością uśrednioną,  $\mu$  – jego lepkością dynamiczną, a  $L$  jest wymiarem charakterystycznym zależnym od geometrii przepływu, np. dla przepływu przez rurę wymiarem charakterystycznym jest średnica rury, dla opływu kulki wymiarem charakterystycznym jest średnica kulki, etc. Turbulencja może, lecz nie zawsze musi rozwinąć się, gdy liczba Reynoldsa  $Re$  przekracza wartość krytyczną  $Re_{cr}$ . Szczegółowe badania doświadczalne wykazały, że wartość ta nie jest uniwersalna, lecz zależy od konkretnego rodzaju ruchu płynu. Na przykład, dla przepływu przez prostoliniowe rury okrągłe  $Re_{cr} = 2300$ .

Ze względu na nader złożony charakter ruchu turbulentnego nie istnieje jak dotąd jego powszechnie przyjęta definicja, a wszystkie dotychczasowe określenia mają charakter fragmentaryczny i niekompletny. Zgodnie z klasyczną definicją Hinzego (1959), najczęściej zresztą stosowaną, przepływ turbulentny jest nieregularnym ruchem płynu, w którym prędkość i inne parametry przepływu doznają nieprzewidywalnych, losowych zmian w przestrzeni i w czasie (tzw. fluktuacji), przy czym jednak pewne wartości średnie charakteryzujące przepływ mogą być określone.

Przyczyna powstawania ruchu turbulentnego przez wiele lat stanowiła problem nierozwiązany, m. in. w związku z niekompatybilnością tego zjawiska z wariacyjnymi zasadami mechaniki. Jak sugerował Reynolds, a wykazał ostatecznie Lin (1946) przyczyną turbulencji jest niestateczność ruchu płynu, w którym oprócz zachowania regularnego, charakterystycznego dla przepływu laminarnego istnieje ciągłe widmo zachowań alternatywnych. Ponieważ żadne z nich nie jest w jakiś szczególny sposób wyróżnione, rzeczywisty proces ruchu płynu 'przeskakuje' w sposób losowy z jednego alternatywnego zachowania do innego, co dla zewnętrznego obserwatora przejawia się w postaci chaotycznego ruchu turbulentnego.

Rola lepkości w powstawaniu turbulencji ma wyraźnie ambiwalentny charakter. Z jednej strony wzrost lepkości wpływa stabilizująco na charakter ruchu płynu, co przejawia się między innymi w tym, że wzrost lepkości występującej w mianowniku wzoru (1) pociąga za sobą spadek liczby Reynoldsa  $Re$ , a tym samym oddalanie się od wartości krytycznej  $Re_{cr}$ . Z drugiej jednak strony, lepkość stanowi istotną przyczynę niestabilności, a przepływy płynów idealnych, w których lepkość z definicji równa się zero, są zawsze regularne i żadna turbulencja w nich nie występuje.

Zgodnie z ideą Reynoldsa wektor prędkości płynu w ruchu turbulentnym  $u_i$  przedstawić można jako sumę wartości średniej  $\bar{u}_i$  oraz losowej fluktuacji  $\hat{u}_i$ , tj.:

$$u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i \quad (4)$$

Wartość średnia wektora prędkości  $\bar{u}_i$  definiowana jest najczęściej w sensie uśrednienia względem czasu  $t$ :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t) dt \quad (5)$$

Przyjmuje się przy tym, że wartość średnia fluktuacji prędkości, a także jakiegokolwiek innego parametru przepływu, jest zawsze równa zero:

$$\overline{\hat{u}} = 0 \quad (6)$$

natomiast wartość średnia kwadratu fluktuacji prędkości, a także kwadratu jakiegokolwiek innego parametru przepływu, jest zawsze różna od zera:

$$\overline{(\hat{u})^2} \neq 0 \quad (7)$$

Można to łatwo sprawdzić przedstawiając fluktuację w postaci sinusoidalnej:

$$\hat{u}(t) = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (8)$$

gdzie  $a$  jest amplitudą, a  $T$  okresem fluktuacji.

Za miarę intensywności fluktuacji prędkości przyjmuje się często średnią z kwadratu fluktuacji prędkości:

$$\tilde{u}^2 \stackrel{\text{df}}{=} \overline{\hat{u}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - \bar{u}]^2 dt \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę statystyczny charakter przepływu turbulentnego wielkość ta odpowiada wariancji prędkości przepływu. Alternatywną miarą jest tzw. intensywność turbulencji  $\theta$  zdefiniowana w sposób:

$$\theta \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{\overline{\hat{u}^2}}}{\sqrt{(\bar{u})^2}} = \frac{\tilde{u}}{\bar{u}} \quad (10)$$

Wielkość ta wyraża odchylenie standardowe (tj. pierwiastek kwadratowy z wariancji) prędkości odniesione do prędkości średniej.

Reynolds zastosował reprezentację (4) do fundamentalnego równania ruchu płynów rzeczywistych, tj. równania Naviera-Stokesa:

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (11)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu,  $\mu$  – jego lepkością,  $P$  – ciśnieniem,  $f$  – intensywnością sił masowych,  $x_i$  – wektorem położenia, a  $t$  – czasem.

Stosując reprezentację (4) również do ciśnienia  $P$  i podstawiając ją do równ. (11) będziemy mieć:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) + (\bar{u}_k + \hat{u}_k) \frac{\partial (\bar{u}_i + \hat{u}_i)}{\partial x_k} \right] = \rho f_i - \frac{\partial (\bar{P} + \hat{P})}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) \quad (12)$$

Uśredniając równocześnie prawą i lewą stronę równ. (12) otrzymuje się tzw. równanie Reynoldsa dla izochorycznych przepływów turbulentnych:

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right] = \rho f_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k}) \quad (13)$$

Występujący w równ. (13) nieliniowy człon  $\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k}$  przyjmujący w ruchu turbulentnym niezerowe wartości składowych nosi nazwę tensora Reynoldsa. W zależności od sposobu jego reprezentacji otrzymuje się odpowiedni model turbulencji.

## 4. Modele turbulencji

### 4.1. Model lepkości turbulentnej

Historycznie pierwszym z takich modeli była koncepcja tzw. lepkości turbulentnej sformułowana ponad 100 lat temu przez Boussinesqa (1868, 1877, 1897). Założył on, że

$$\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k} = -\mu_T D_{ik} \quad (14)$$

gdzie  $\mu_T$  jest współczynnikiem lepkości turbulentnej, a  $D_{ik}$  jest uśrednionym tensorem szybkości deformacji zdefiniowanym w sposób:

$$D_{ik} = \frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \quad (15)$$

W przeciwieństwie do ‘zwykłej’ lepkości płynu  $\mu$ , stanowiącej własność określonego rodzaju materiału, lepkość turbulentna  $\mu_T$  nie jest wielkością stałą, lecz zależy w sposób istotny od panujących warunków przepływu, jest zatem zarówno funkcją położenia jak i czasu.

Podstawiając hipotezę Boussinesqa (14) do równania Reynoldsa (13) otrzymuje się ostatecznie:

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right] = \rho f_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + (\mu + \mu_T) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (16)$$

Równanie (16) razem z równaniem ciągłości przepływu dla ruchów izochorycznych

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

tworzy zamknięty układ równań.

Hipoteza Boussinesqa (14) posiada dwie bardzo istotne zalety: jest prosta i łatwa do zrozumienia, a ponadto nie wymaga wprowadzania żadnych dodatkowych równań.

Szczegółową analizę krytyczną koncepcji Boussinesqa przestawił Hinze (1959) wykazując jej wewnętrzną sprzeczność. Ponadto hipoteza Boussinesqa (14) i uzyskane w oparciu o nią równ. (16) okazały się być zbyt uproszczone i niewystarczające do opisu większości zagadnień związanych z ruchem turbulentnym. W związku z tym rozmaici autorzy w przeciągu ostatnich kilkudziesięciu lat sformułowali szereg znacznie bardziej złożonych modeli turbulencji. Niestety, ruch turbulentny okazuje się być procesem nadzwyczaj złożonym i żaden z modeli nie okazał się być na tyle uniwersalny, aby opisać wszelkie jego aspekty.

### 4.2. Model drogi mieszania

Idea tego modelu pochodząca od Prandtla zakłada wprowadzenie drogi mieszania  $l_m$  – nowego parametru o wymiarze długości, który odpowiada liczonej wzdłuż osi strug odległości, na której następuje wymieszanie sąsiadujących turbulentnych strug przepływającego płynu. Zgodnie z koncepcją Prandtla długość drogi mieszania wyrazić można prostym wzorem:

$$l_m = \kappa y \quad (18)$$

gdzie  $y$  jest odległością liczoną prostopadle do sztywnej ścianki, a  $\kappa$  jest tzw. stałą Kármána, której wartość wynosi około 0.407 (podawane są też w literaturze wartości 0.40, 0.405, 0.41).

W oryginalnej koncepcji Prandtla lepkość turbulentna wyraża się wzorem:

$$\mu_T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (19)$$

Ponieważ oryginalny model drogi mieszania prowadził do rezultatów niezgodnych z doświadczeniem dla małych odległości od ścianki, Kolmogorov oraz Prandtl zaproponowali niezależnie modele turbulencji,

w których lepkość turbulentna uzależniona jest zarówno od drogi mieszania  $l_m$  jak również od energii kinetycznej turbulencji przypadającej na jednostkę masy płynu  $K$ . Ten ostatni parametr jest wielkością skalarną zdefiniowaną w sposób:

$$K = \frac{\text{df}}{2} \overline{\hat{u}_i \hat{u}_i} \quad (20)$$

W takim przypadku lepkość turbulentna wyraża się wzorem:

$$\mu_T = C_\mu \rho l_m \sqrt{K} \quad (21)$$

gdzie  $C_\mu$  jest bezwymiarowym współczynnikiem empirycznym. Przeprowadzone pomiary doświadczalne pozwoliły na następujące ustalenie jego wartości:

$$C_\mu = 0.09 \quad (22)$$

Energia kinetyczna turbulencji przypadająca na jednostkę masy płynu  $K$  nie jest na ogół znana *a priori*. Ponieważ jest ona traktowana jest jako wielkość zachowawcza, jej równanie zachowania w warunkach przepływów izochorycznych może być przedstawione w sposób:

$$\rho \left[ \frac{\partial K}{\partial t} + u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\mu + \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu D_{ik} \overline{u_i} \right\} \quad (23)$$

Klasyczny układ równań (16), (17) sprzężony z dodatkowym równaniem (23) stanowi układ zamknięty. Dlatego też koncepcję tę traktować można jako model turbulencji z jednym równaniem domykającym.

### 4.3. Model turbulencji $K$ - $\varepsilon$

Model turbulencji  $K$ - $\varepsilon$  zaproponowany po raz pierwszy przez Chou (1945) i modyfikowany później przez wielu autorów wprowadza dwa dodatkowe parametry podstawowe: energię kinetyczną turbulencji przypadającą na jednostkę masy płynu  $K$  oraz dyssypację energii kinetycznej turbulencji  $\varepsilon$ . Podobnie jak energia kinetyczna turbulencji  $K$ , dyssypacja energii kinetycznej turbulencji  $\varepsilon$  jest również wielkością skalarną, która jest zdefiniowaną w sposób:

$$\varepsilon = \frac{\text{df}}{\rho} \overline{\frac{\mu}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}} \quad (24)$$

Każdy z tych parametrów, tj. zarówno  $K$  jak i  $\varepsilon$ , jest wielkością zachowawczą. Ich wyznaczenie wymaga stosowania dodatkowych równań zachowania, sprzężonych z równaniem Reynoldsa. Równania te przyjmują następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho K u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) + \mu_T D_{ik} D_{ki} - \rho \varepsilon \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \mu_T D_{ik} D_{ki} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (26)$$

Parametry  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$  występujące w powyższych równaniach są wielkościami stałymi, które powinny być wyznaczone doświadczalnie. Przeprowadzone pomiary empiryczne pozwoliły na ustalenie następujących wartości tych parametrów:

$$\sigma_k = 1.00 \quad (27)$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.30 \quad (28)$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad (29)$$

$$C_{2\varepsilon} = 1.92 \quad (30)$$

Ideę każdego równań (25), (26) można wyrazić krótko następującymi słowami:

„Szybkość zmiany  $K$  lub  $\varepsilon$  w czasie (pierwszy człon lewej strony) + adwekcyjny transport  $K$  lub  $\varepsilon$  (drugi człon lewej strony) = dyfuzyjny transport  $K$  lub  $\varepsilon$  (pierwszy człon prawej strony) + szybkość generowania  $K$  lub  $\varepsilon$  (drugi człon prawej strony) – szybkość niszczenia  $K$  lub  $\varepsilon$  (trzeci człon prawej strony)”.

W modelu  $K$ - $\varepsilon$  przyjmuje się reprezentację tensora Reynoldsa w postaci:

$$-\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k} = \mu_T D_{ik} - \frac{2}{3} \left( K + \mu_T \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} \right) \delta_{ik} \quad (31)$$

lub w bardziej uproszczonej postaci dla przepływów izochorycznych:

$$-\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k} = \mu_T D_{ik} - \frac{2}{3} K \delta_{ik} \quad (32)$$

gdzie  $\delta_{ik}$  jest tensorem jednostkowym (delta Kroneckera).

Lepkość turbulentną wyraża się tutaj stosunkowo prostym wzorem:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (33)$$

gdzie  $C_\mu$  jest współczynnikiem empirycznym, którego wartość wyznaczona doświadczalnie wynosi 0.09.

#### 4.4. Model turbulencji $K$ - $\omega$

Idea tego modelu pochodzi od Kołmogorowa (1941, 1942), który jako jeden z istotnych parametrów charakteryzujących turbulencję przyjął szybkość jej dyssypacji  $\omega$ . Właściwie skalarny ten parametr wyraża szybkość dyssypacji energii turbulencji przypadającą na jednostkę energii turbulencji i dlatego też jego wymiarem w układzie SI jest odwrotność sekundy.

Kołmogorow zaproponował następujący związek między szybkością dyssypacji  $\omega$  a energią kinetyczną turbulencji odniesioną do jednostki masy płynu  $K$ :

$$\omega \sim \frac{K^2}{l_m} \quad (34)$$

W przypadku zamiany proporcjonalności na równość stały współczynnik proporcjonalności nie jest tutaj wielkością bezwymiarową ze względu na różnicę wymiarów prawej i lewej strony proporcji (34).

W modelu  $K$ - $\omega$  lepkość turbulentną wyraża się przy pomocy następującego wzoru:

$$\mu_T = \frac{\rho K}{\omega} \quad (35)$$

w którym zgodność wymiarów prawej i lewej strony jest zachowana.

Zarówno energia kinetyczna turbulencji  $K$  jak i szybkość dyssypacji  $\omega$  nie są zadane *a priori*; wymagają zatem wbudowania w modelu ich równań zachowania.

Idea Kołmogorowa rozbudowana została później przez Saiy'a (1974), Spaldinga (1979), Wilcoxa (1988, 2006, 2008), Mentera (1993) i innych.

Poniżej podane równania zachowawcze dla energii kinetycznej turbulencji  $K$  jak i szybkości dyssypacji  $\omega$  pochodzące z monografii oraz arykułu Wilcoxa (2006, 2008) uwzględniają istnienie ściśliwości płynów:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho K u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \mu + \sigma_k \frac{\rho K}{\omega} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_k \rho \omega K \quad (36)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\omega u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \mu + \sigma_\omega \frac{\rho K}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} + \frac{\gamma\omega}{K} T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_\omega \rho f_s \omega^2 \\ + \frac{\rho\sigma_d}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} H \left( \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

W równaniach powyższych  $T_{ik}$  jest tensorem naprężeń turbulentnych

$$T_{ik} \stackrel{\text{df}}{=} \mu_T E_{ik} - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ik} \quad (38)$$

gdzie

$$E_{ik} = D_{ik} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \quad (39)$$

natomiast  $H(\dots)$  oznacza funkcję Heaviside'a zdefiniowaną w sposób:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{dla } \xi < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Lepkość turbulentna wyraża się tutaj wzorem:

$$\mu_T = \frac{\rho K}{\text{Max} \left\{ \omega, C_l \sqrt{\frac{1}{2\beta_\omega f_s} E_{ik} E_{ki}} \right\}} \quad (41)$$

przy czym parametry  $\gamma$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$ ,  $\sigma_d$ ,  $\beta_k$ ,  $\beta_\omega$ ,  $C_l$  są wielkościami stałymi, dla których udało się ustalić drogą doświadczalną następujące ich wartości:

$$\gamma = \frac{13}{25} \quad (42)$$

$$\sigma_k = 0.6 \quad (43)$$

$$\sigma_\omega = 0.5 \quad (44)$$

$$\sigma_d = \frac{1}{8} \quad (45)$$

$$\beta_k = 0.09 \quad (46)$$

$$\beta_\omega = 0.0708 \quad (47)$$

$$C_l = \frac{7}{8} \quad (48)$$

Wartość parametru  $f_s$  wyraża się w następujący sposób:

$$f_s = \frac{8 |(\beta_k \omega)^3| + 85 |\mathfrak{N}_{W,W,E}|}{8 |(\beta_k \omega)^3| + 100 |\mathfrak{N}_{W,W,E}|} \quad (49)$$

gdzie  $E_{ik}$  jest dewiatorowym tensorem szybkości deformacji określonym wzorem (39),  $W_{ik}$  jest uśrednionym tensorem rotacji

$$W_{ik} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \quad (50)$$

a  $\aleph_{U,V,W}$  jest podwójnym iloczynem wewnętrznym tensorów drugiego rzędu zdefiniowanym w sposób:

$$\aleph_{U,V,W} \stackrel{\text{df}}{=} U_{ij} V_{jk} W_{ki} \quad (51)$$

Dla  $K$  przyjmuje się zerowy warunek brzegowy na sztywnych ściankach, tj.:

$$K|_w = 0 \quad (52)$$

Natomiast dla  $\omega$  przyjmowane są rozmaite niezerowe warunki brzegowe. Przy zbliżaniu się do ścianki gładkiej zazwyczaj przyjmuje się:

$$\omega|_w \rightarrow 6 \frac{\mu_w}{\beta_\omega \rho y^2} \quad (53)$$

gdzie  $\mu_w$  jest lepkością turbulentną na ściance, a  $y$  jest odległością od ścianki. Wzór ten nie może być stosowany do samej ścianki, gdyż prowadzi wówczas do osobliwości. Menter (1994) zaproponował modyfikację modelu pozwalającą na usunięcie wspomnianej osobliwości.

Alternatywnie, Wilcox zaproponował następujący warunek brzegowy dla ‘lekko chropowatej ścianki’ (ang. *slightly rough surface*):

$$\omega|_w = 40000 \frac{\mu_w}{\rho k_s^2} \quad (54)$$

natomiast dla ścianki gładkiej zasugerował przyjęcie ‘dostatecznie małego’  $k_s$ , aby warunek

$$\frac{\rho k_s u_\tau}{\mu} < 5 \quad (55)$$

był spełniony, przy czym  $u_\tau$  oznacza znaną z teorii warstwy granicznej tzw. ‘prędkość tarcia na ściance’.

#### 4.5. Model turbulencji EARSM

Model turbulencji przyjęty w obliczeniach numerycznych (tzw. *explicit algebraic Reynolds stress model* – EARSM) stanowi nieliniowe rozszerzenie przedstawionych w zarysie modeli z dwoma równaniami domykającymi – najbliższy jest modelowi  $K-\omega$ . Jego ideę przedstawili Gatki i Speziale (1993), a szczególnie koncepcja wykorzystana przez autorów do obliczeń numerycznych oparta jest na pracach Wallina i Johanssona (2000) oraz Hellstena (2005).

W omawianym modelu turbulencji równanie transportu tensora naprężeń turbulentnych Reynoldsa przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}) = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k} + \overline{(\delta_{kj} \hat{u}_i + \delta_{ik} \hat{u}_j) \hat{P}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}) \right\} \\ & - \rho \left( \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{\hat{u}_j \hat{u}_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \rho \beta (g_i \overline{\hat{u}_j \theta} + g_j \overline{\hat{u}_i \theta}) \\ & + \hat{P} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - 2\mu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - 2\rho \Omega_k (\overline{\hat{u}_j \hat{u}_m} \epsilon_{ikm} + \overline{\hat{u}_i \hat{u}_m} \epsilon_{jkm}) \end{aligned} \quad (56)$$

gdzie  $\beta$  jest wielkością stałą,  $\Omega_k$  jest wektorem rotacji,  $\delta_{ik}$  jest tensorem jednostkowym (delta Kroneckera), a  $\epsilon_{ijk}$  oznacza tensor Levi-Civita (symbol antysymetryczności).

Lewa strona równ. (56) reprezentuje pochodną substancjalną tensora naprężeń Reynoldsa. Pierwszy człon prawej strony tego równania wyraża dyfuzję turbulentną, drugi człon – dyfuzję lepka związaną z lepkością molekularną, trzeci człon – generowane naprężenie, czwarty człon – tworzenie stanu równowagi, piąty człon – ciśnienie związane z odkształceniem, szósty człon – dyssypację energii, siódmy człon – generowanie energii związane z rotacją.

Należy zaznaczyć, że dla turbulencji anizotropowej tensor naprężeń Reynoldsa jest również anizotropowy, a niezmienniki drugi i trzeci tensora anizotropii zdefiniowanego w sposób:

$$B_{ik} = \frac{\widehat{u}_i \widehat{u}_k}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \quad (57)$$

są różne od zera. Należy zatem spodziewać się, że anizotropia tensora Reynoldsa jest wynikiem anizotropii tworzenia turbulencji, dyssypacji, transportu, związku ciśnienia z odkształceniem, oraz efektów związanych z lepkością molekularną. Wyraża to, w dość skomplikowanej formie, równanie transportu tensora naprężeń turbulentnych Reynoldsa (56).

W przyjętym modelu zakłada się następującą reprezentację tensora Reynoldsa:

$$\rho \overline{\widehat{u}_i \widehat{u}_k} = K \rho \left( A_{ik} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \right) \quad (58)$$

gdzie  $A_{ik}$  jest nowym tensorem anizotropii. Tensor ten może być wyznaczony jako rozwiązanie następującego równania uwikłanego zapisanego w notacji absolutnej w sposób:

$$(\alpha_3 + \alpha_4) \mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{S} + \mathbf{AV} - \mathbf{VA} - \alpha_2 (\mathbf{AS} - \mathbf{SA}) + \frac{2}{3} \alpha_2 \text{Tr}\{\mathbf{AS}\} \mathbf{I} \quad (59)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest tensorem jednostkowym (delta Kroneckera).

W równaniu powyższym  $S_{ij}$  oraz  $V_{ij}$  oznaczają odpowiednio bezwymiarowy uśredniony tensor szybkości deformacji oraz bezwymiarowy uśredniony tensor rotacji zdefiniowane odpowiednio w sposób:

$$S_{ik} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\tau}{2} D_{ik} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad (60)$$

$$V_{ik} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\tau}{2} W_{ik} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad (61)$$

Występującą w powyższych definicjach skalę czasową  $\tau$  określa się jako:

$$\tau = \frac{K}{\varepsilon} = \frac{1}{C_\mu \omega} \quad (62)$$

gdzie  $K$  jest energią kinetyczną turbulencji przypadającą na jednostkę masy płynu,  $\varepsilon$  – intensywnością dyssypacji energii kinetycznej turbulencji,  $\omega$  – szybkością dyssypacji energii kinetycznej turbulencji. Współczynnik empiryczny  $C_\mu$  przyjmuje się zazwyczaj równy 0.09.

Tensor  $A_{ik}$  nie może być wyrażony w postaci jawnej jako rozwiązanie równania uwikłanego (59). Można natomiast uzyskać jego wielomianową aproksymację w postaci:

$$\begin{aligned} A_{ik} = & \beta_1 D_{ik} + \beta_3 \left( V_{ij} V_{jk} - \frac{1}{3} II_V \delta_{ik} \right) + \beta_4 \left( S_{ij} V_{jk} - V_{ij} S_{jk} \right) \\ & + \beta_6 \left( S_{ij} V_{jl} V_{lk} + V_{ij} V_{jl} S_{lk} - \frac{2}{3} \aleph_{D,V,V} \delta_{ik} - II_V S_{ik} \right) \\ & + \beta_9 \left( V_{ij} S_{jl} V_{lm} V_{mk} - V_{ij} V_{jl} S_{lm} V_{mk} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

W reprezentacji powyższej, stanowiącej postawę modelu,  $II_G$  oznacza drugi niezmiennik główny dowolnego tensora  $G_{ik}$  zdefiniowany w sposób:

$$II_G \stackrel{\text{df}}{=} G_{ij} G_{jk} \quad (64)$$

natomiast  $\aleph_{D,V,V}$  jest parametrem skalarnym stanowiącym dwukrotny iloczyn wewnętrzny tensorów i zdefiniowanym wzorem (51).

Współczynniki  $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_9$  określone są w sposób:

$$\beta_1 \stackrel{\text{df}}{=} -\frac{\alpha_1 N}{N^2 - 2H_V} \quad (65)$$

$$\beta_3 \stackrel{\text{df}}{=} -12 \frac{\alpha_1 \mathfrak{S}_{D,V,V}}{N(N^2 - 2H_V)(2N^2 - H_V)} \quad (66)$$

$$\beta_4 \stackrel{\text{df}}{=} -\frac{\alpha_1}{N^2 - 2H_V} \quad (67)$$

$$\beta_6 \stackrel{\text{df}}{=} -6 \frac{\alpha_1 N}{(N^2 - 2H_V)(2N^2 - H_V)} \quad (68)$$

$$\beta_9 \cong 0 \quad (69)$$

Występujący w powyższych równaniach parametr  $N$  nie jest zadany *a priori*. Można go jednak wyznaczyć z następującego równania sześciennego:

$$\left(N - \frac{\alpha_3}{3}\right)^3 + 3p \left(N - \frac{\alpha_3}{3}\right) + 2q = 0 \quad (70)$$

gdzie

$$p = -\left(\frac{\alpha_3^2}{9} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{3} H_S - \frac{2}{3} H_V\right) \quad (71)$$

$$q = -\left(\frac{\alpha_3^2}{27} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{6} H_S - \frac{2}{3} H_V\right) \alpha_3 \quad (72)$$

Ilość rozwiązań rzeczywistych równania sześciennego (70) zależy od wyróżnika  $\Delta$  zdefiniowanego jako:

$$\Delta = q^2 + p^3 = \left(\frac{\alpha_3^2}{27} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{6} H_S - \frac{2}{3} H_V\right)^2 \alpha_3^2 - \left(\frac{\alpha_3^2}{9} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{3} H_S - \frac{2}{3} H_V\right)^3 \quad (73)$$

Jeśli  $\Delta > 0$ , wówczas równanie (70) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone. Jeśli  $\Delta < 0$ , wówczas równanie (70) posiada trzy pierwiastki rzeczywiste. W pierwszym przypadku pierwiastki zespolone nie posiadają znaczenia fizycznego, natomiast na mocy dobrze znanego wzoru Cardana pierwiastek rzeczywisty wyraża się wzorem:

$$N = \frac{\alpha_3}{3} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}} \quad (74)$$

W drugim przypadku natomiast, korzystając z trygonometrycznej metody rozwiązywania równań sześciennych otrzymuje się następujący wzór na pierwiastek rzeczywisty równania sześciennego (68) posiadający sens fizyczny:

$$N = \frac{\alpha_3}{3} + 2 \sqrt[6]{q^2 - \Delta} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{\sqrt{q^2 - \Delta}} \right) \right\} \quad (75)$$

#### 4.6. SAS – alternatywny model turbulencji

*Scale adaptative simulation* (SAS) stanowił alternatywny model turbulencji przyjęty przez autorów niniejszej pracy w obliczeniach numerycznych. Bardziej dokładnie, zastosowano jego rozszerzoną wersję SAS-SST. Stanowi ona znacznie zmodyfikowaną wersję modelu  $K-\omega$ , do którego wprowadzono parametr  $l_s$  wyrażający skalę długości analizowanej turbulencji. Omawiany model sformułowany został przez Mentera et al. (1992, 1993, 1994, 2004) do analizy przepływów aerodynamicznych z silnymi odwrotnymi gradientami ciśnienia i oderwaniem warstwy granicznej.

Poniżej podane równania zachowawcze dla energii kinetycznej turbulencji  $K$  jak i szybkości dysypacji  $\omega$  dla modelu SAS-SST uwzględniają istnienie ściśliwości płynów:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho K u_i) = G + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) - C_\mu \rho \omega K \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = & \alpha \frac{\omega}{K} G + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right\} - \beta \rho \omega^2 \\ & + [1 - F_1(K, \omega)] \frac{2\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + Q \end{aligned} \quad (77)$$

Wielkość  $G$  oznacza tutaj minimum

$$G = \text{Min} \{ G_*, 10\beta_k \rho K \omega \} \quad (78)$$

gdzie

$$G_* = \mu_\tau \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} D_{ik} = \mu_\tau \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad (79)$$

$$\beta_k = 0.09 = \text{const} \quad (80)$$

Pierwsza funkcja mieszania  $F_1(K, \omega)$  zdefiniowana jest w sposób:

$$F_1(K, \omega) = \text{th} \left[ \left( \text{Min} \left\{ \text{Max} \left( \frac{\sqrt{K}}{\beta_k \omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho K}{C_\omega y^2} \right\} \right)^4 \right] \quad (81)$$

gdzie  $y$  jest odległością od sztywnej ścianki, a parametr  $C_\omega$  zdefiniowany jest jako:

$$C_\omega = \text{Max} \left\{ 2\rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right\} \quad (82)$$

Pierwsza funkcja mieszania  $F_1(K, \omega)$  zdąża do zera w miarę oddalania się od sztywnej ścianki, co odpowiada modelowi  $K-\varepsilon$ , natomiast zbliża się do jedności w obrębie warstwy granicznej, co odpowiada modelowi  $K-\omega$ .

Druga funkcja mieszania  $F_2(K, \omega)$  zdefiniowana jest w sposób:

$$F_2(K, \omega) = \text{th} \left[ \left( \text{Max} \left\{ \frac{2\sqrt{K}}{\beta_k \omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right\} \right)^2 \right] \quad (83)$$

Dzięki funkcjom mieszania wszystkie parametry stałe modelu przyjmują postać typu

$$\alpha = \alpha_\varepsilon (1 - F) + \alpha_\omega F \quad (84)$$

dzięki czemu stanowią one wynik ‘zmieszania’ parametrów charakterystycznych dla modelu  $K-\varepsilon$  z parametrami charakterystycznymi dla modelu  $K-\omega$ .

Wprowadzenie w równaniu na szybkość dyssypacji (77) dodatkowego źródła  $Q$ , zaproponowane po raz pierwszy jak się zdaje przez Mentera i Egorova (2005) umożliwia uwzględnienie wpływu efektów drobnoskalowych na obraz przepływu. Tym samym model SAS z dodatkowym źródłem uwzględni superpozycję efektów grubo- i drobnoskalowych w obrazie turbulencji.

W koncepcji Mentera i Egorova dodatkowe źródło  $Q$  przedstawić można w postaci:

$$Q = H \left[ \frac{1}{2} \rho \eta_2 \kappa \left( \frac{l_s}{l_m} \right)^2 D_{ik} D_{ki} - 2 C_s \frac{\rho K}{\sigma_s} \text{Max} \left\{ \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \frac{1}{K^2} \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right\} \right] \quad (85)$$

gdzie  $H(\dots)$  jest funkcją Heaviside'a zdefiniowaną wzorem (40). Występujące tutaj parametry stałe przyjmują następujące wartości ustalone w wyniku obserwacji empirycznych:

$$\eta_2 = 3.51 \quad (86)$$

$$\sigma_s = 2/3 \quad (87)$$

$$C_s = 2 \quad (88)$$

Charakterystyczna skala długości  $l_s$  w przyjętym modelu turbulencji związana jest z parametrami  $K$ - $\omega$  relacją:

$$l_s = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt[4]{C_\mu} \omega} \quad (89)$$

Natomiast  $l_m$  jest trójwymiarowym uogólnieniem skali długości von Kármána, która w przypadku jednowymiarowym wyraża się wzorem:

$$l_m = \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{-1} \quad (90)$$

gdzie  $\kappa$  jest stałą Kármána. Skalę tę w trójwymiarowych warunkach przepływu wyrazić można ogólnym wzorem:

$$l_m = \kappa \frac{\sqrt{\frac{1}{2} D_{jk} D_{kj}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2}} = \kappa \frac{\sqrt{D_{jk} D_{kj}}}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2}} \quad (91)$$

W warstwie granicznej w obszarze logarytmicznego profilu prędkości obydwie skale  $l_m$  oraz  $l_s$  redukują się do wartości równej  $\kappa y$ , co prowadzi do uproszczenia wzoru (85) na źródło  $Q$ .

W przyjętym modelu wielkość  $\mu_\tau$  stanowiąca odpowiednik lepkości turbulentnej wyraża się wzorem:

$$\mu_\tau = \frac{a_1 K}{\text{Max} \left\{ a_1 \omega, F_1(K, \omega) \sqrt{\frac{1}{2} D_{ik} D_{ki}} \right\}} \quad (92)$$

zawierającym w sobie pierwszą funkcję mieszania.

Należy zaznaczyć, że spośród dostępnych modeli należało ostatecznie wybrać jeden, umożliwiający wykonanie poprawnych obliczeń dla zadanych warunków brzegowych i wybranej geometrii. Wybór odpowiedniego modelu obliczeniowego nastąpił po przeprowadzeniu eksperymentu kalibracyjnego na specjalnie do tego celu zaprojektowanym stanowisku laboratoryjnym.

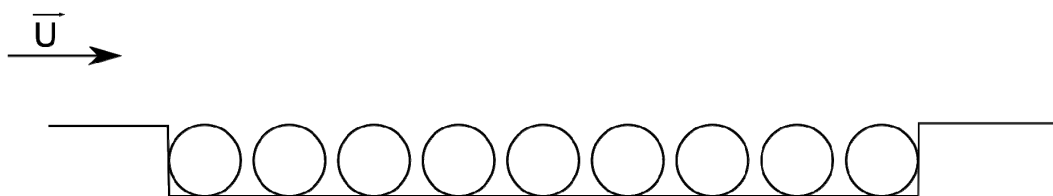
## 5. Stanowisko pomiarowe

### 5.1. Koncepcja stanowiska pomiarowego

Właściwy wybór modelu obliczeniowego jest uzależniony od wyników odpowiednio zaprojektowanego eksperymentu laboratoryjnego. Jest to szczególnie istotne w przypadku prac mających na celu rozszerzenie istniejącego modelu przepływu.

Dotychczasowe stanowisko pomiarowe (Skotniczny i in., 2011, 2012) nie nadawało się do przeprowadzenia zaplanowanych eksperymentów z uwagi na brak możliwości jednoznacznego określenia rozkładu przestrzennego pierwszej warstwy złoża porowatego uformowanego z kulek ballotyny.

Ponieważ idea omawianego w niniejszym artykule modelu hybrydowego złoża porowatego polega na określeniu parametrów przepływowych płynu na podstawie znajomości jego parametrów w strudze swobodnej, w pierwszej fazie skoncentrowano się na określeniu parametrów przepływowych strugi powietrza dla przypadku stycznego przepływu strugi nad palisadą kulek (rys. 3). W przedstawionym podejściu istotnym czynnikiem jest rozkład prędkości w pobliżu kulki oraz w przestrzeni pomiędzy kulkami.



Rys. 3. Eksperyment kalibrujący

Wyniki pomiarów uzyskane z eksperymentów i ich zgodność z rezultatami symulacji numerycznych przyjęto za kryterium rozstrzygające o wyborze modelu numerycznego turbulencji. Stanowiły one również podstawę do późniejszych modyfikacji konstrukcji stanowiska pomiarowego, mających na celu rozszerzenie przypadku przepływowego o nowe zjawiska.

W związku z powyższymi uwagami konieczne było zaprojektowanie oraz wykonanie nowego stanowiska badawczego. Po wstępnej analizie zdecydowano się na pozostawienie istniejącego tunelu dolotowego, z uwagi na dobre parametry strugi powietrza w przekroju wylotowym, jak równomierny rozkład prędkości oraz niską wartość intensywności turbulencji. Natomiast modyfikacji poddano w całości komorę pomiarową.

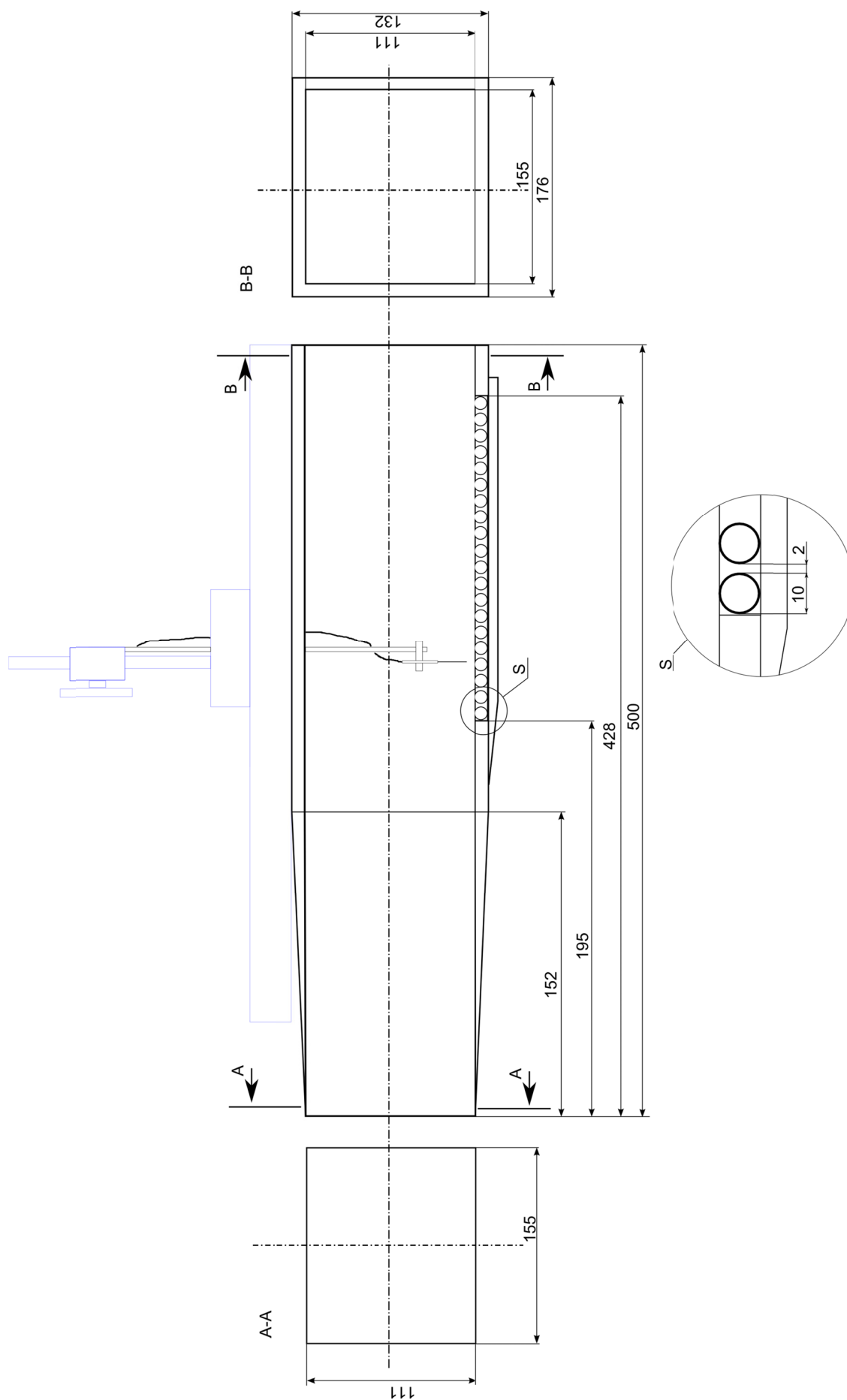
Komora pomiarowa, której schemat oraz główne wymiary zamieszczono na rys. 4, została w całości zbudowana z płyt szkła akrylowego o grubości 10 mm. W dolnej ścianie komory, w odległości 195 mm od krawędzi wlotowej wykonano gniazdo o głębokości 10 mm, szerokości 10 mm i długości 233 mm, które miało na celu pomieścić rząd 20 łożyskowych kulek stalowych o średnicy 10 mm. Odległości pomiędzy osadzonymi kulkami wynosiły 2 mm.

Istotnym zagadnieniem było dostarczenie strugi powietrza do przestrzeni pomiarowej. Dotychczasowe rozwiązanie polegające na zamocowaniu na sztywno komory pomiarowej do wylotu tunelu dolotowego wprowadzało ryzyko 'przenoszenia' warstwy granicznej utworzonej na ścianach tunelu do przestrzeni pomiarowej.

Aby wyeliminować to zjawisko, które w świetle zamierzonych badań było niekorzystne (różnica w chropowatościach powierzchni materiału tunelu i komory pomiarowej mogła spowodować ryzyko wystąpienia niestabilności warstwy przyściennej), zdecydowano się na odseparowanie od siebie tych dwóch elementów. Przekrój poprzeczny komory pomiarowej zmniejszono o 20 mm z każdej strony (rys. 5) oraz odsunięto komorę pomiarową od przekroju wylotowego tunelu również o 20 mm. Wartości liczbowe przesunięć uzyskano poprzez analizę danych eksperymentalnych wypływu powietrza z tunelu dolotowego.

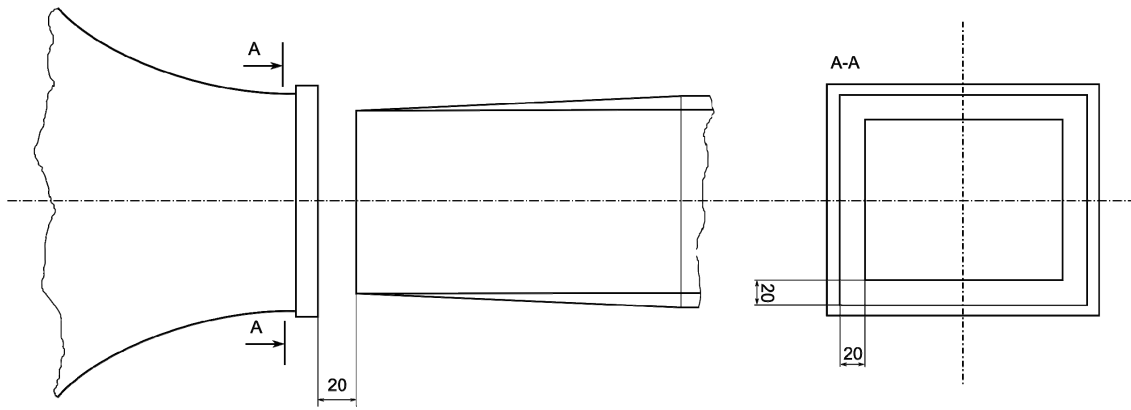
Widok kompletnej komory pomiarowej wraz z tunelem dolotowym i widocznym rzędem kulek zamieszczono na rys. 6.

Rząd kulek został umieszczony w gnieździe ściany spodniej w taki sposób, aby wykluczyć przypadkowe przesunięcie się kulki podczas wykonywania eksperymentu (rys. 7). Do ustalania odległości pomiędzy kulkami służył specjalny szablon.

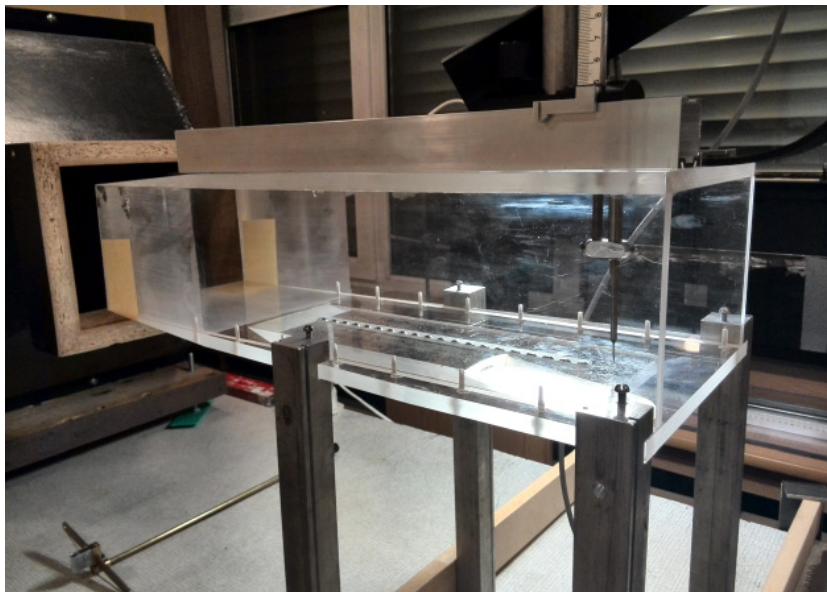


Rys. 4. Schemat stanowiska pomiarowego. Wymiary podano w mm

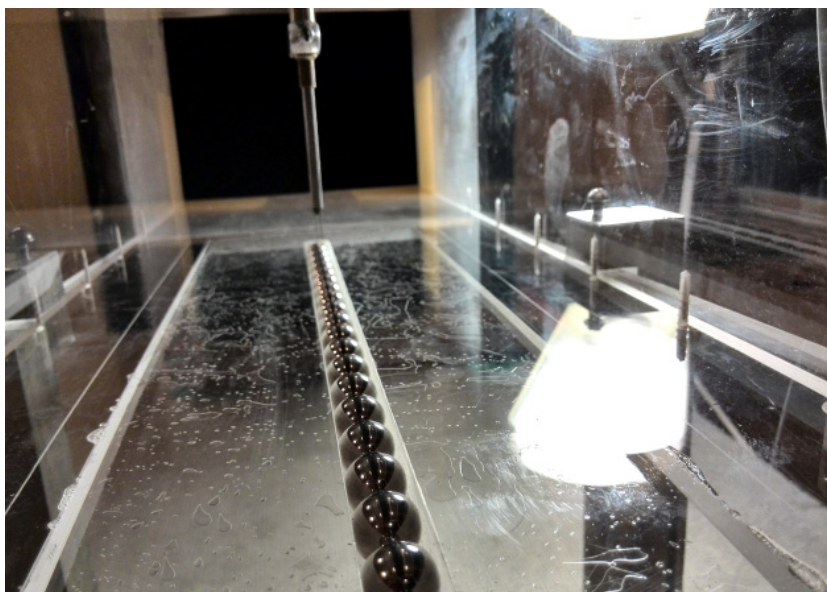




Rys. 5. Sposób doprowadzenie strugi powietrza do komory pomiarowej



Rys. 6. Widok komory pomiarowej

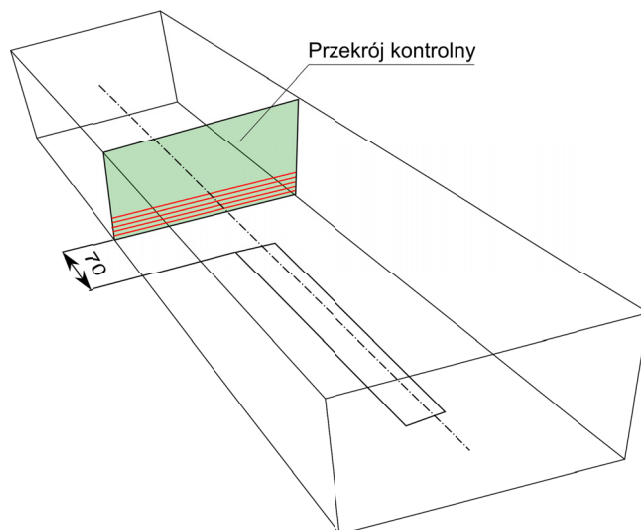


Rys. 7. Widok rzędu kulek w komorze pomiarowej

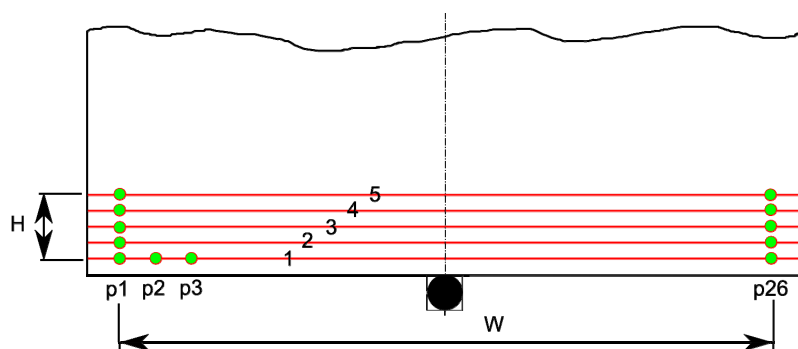
## 5.2. Określenie jakości strugi powietrza w komorze pomiarowej

Pomiar sprawdzający jakość strugi powietrza wewnątrz komory pomiarowej wykonano sondą termoanemometryczną trójwłóknową. Pomiar polegał na wyznaczeniu profilów prędkości oraz intensywności turbulencji w wybranym przekroju poprzecznym komory znajdującym się przed rzędem kulek.

Pozycja przekroju kontrolnego została zademonstrowana na rys. 8. W wybranym przekroju dokonano pomiarów w 26 punktach w poprzek przekroju, leżących na 5 równoległych do siebie liniach sondowania. Rozmieszczenie linii sondowania przedstawiono na rys. 9.



Rys. 8. Przekrój kontrolny



Rys. 9. Rozmieszczenie linii sondowania i punktów pomiarowych w przekroju kontrolnym

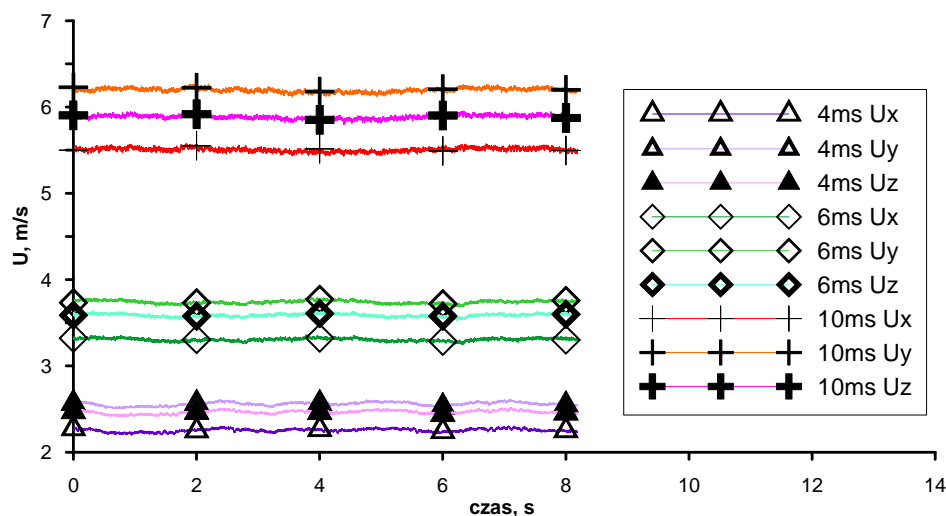
W celu określenia jakości i dokładności wykonania komory oraz prawidłowości jej zamocowania względem przekroju wylotowego tunelu wykonano kilka pomiarów dla różnych prędkości przepływu strugi w przekroju wlotowym  $U_0$ .

Analiza uzyskanych przebiegów czasowych zmienności wartości składowych wektora prędkości wykazała zadowalającą stacjonarność przepływu (w sensie wartości średnich) oraz małe wartości intensywności turbulencji  $\theta$ . Uśrednione dane z całego przekroju dla trzech wartości prędkości wlotowych  $U_0$  zamieszczono w tabeli 1.

Tab. 1. Uśrednione wartości prędkości i intensywności turbulencji

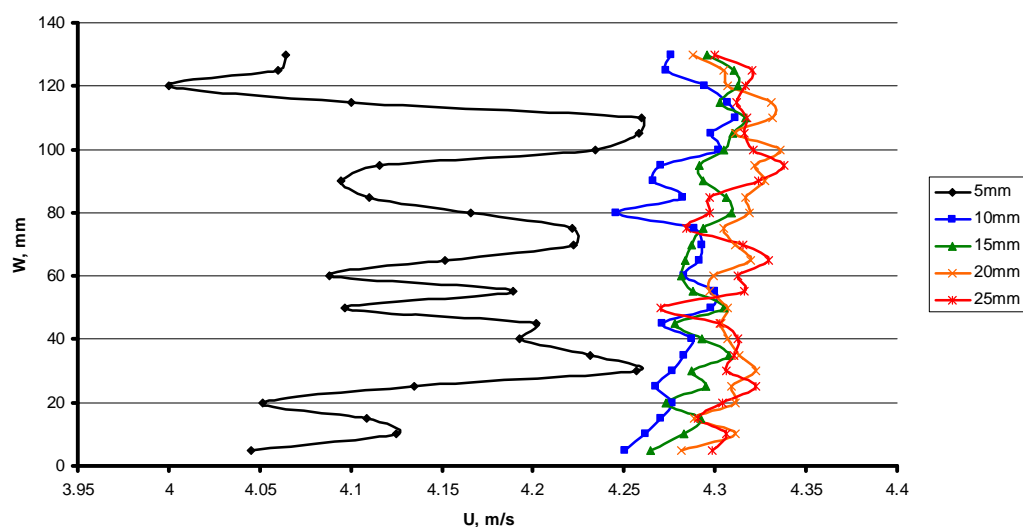
$U_0$ [m/s]	$U_x$ [m/s]	$U_y$ [m/s]	$U_z$ [m/s]	$U$ [m/s]	$\theta$ [%]	$E_k$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
4	2.3	2.6	2.5	4.2	0.47	3.37E-05
6	3.3	3.7	3.6	6.1	0.29	1.28E-05
10	5.5	6.2	5.9	10.2	0.23	7.91E-06

Przykładowy przebieg czasowy tłumaczący niskie wartości intensywności turbulencji zamieszczono na rys. 10.



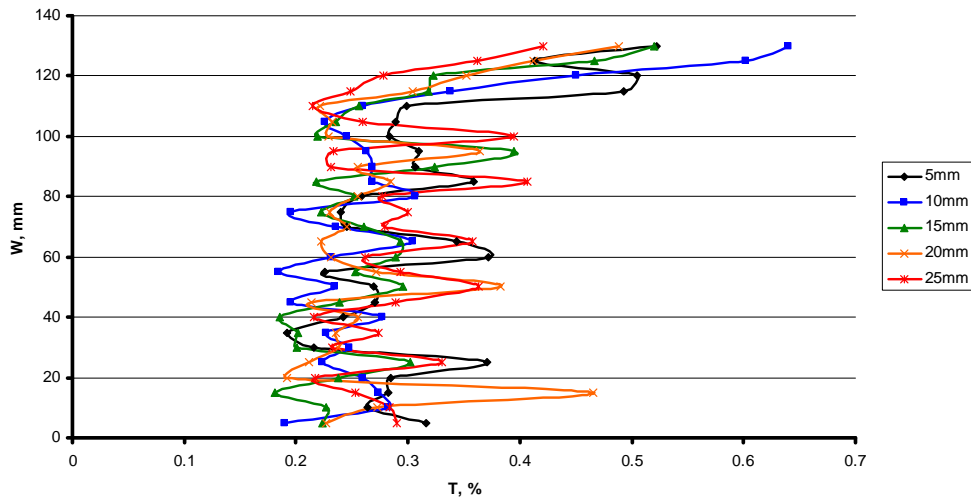
Rys. 10. Przykładowy przebieg czasowy składowych wektora prędkości

Na rysunkach 11 oraz 12 zamieszczono rozkłady odpowiednio prędkości średniej i intensywności turbulencji dla wybranej prędkości  $U_0 = 4$  m/s.



Rys. 11. Rozkład prędkości średniej  $U$  na szerokości  $W$  komory pomiarowej, na wysokościach odpowiednio 5, 10, 15, 20 i 25 mm nad dolną ścianą komory, dla prędkości w przestrzeni wlotowej  $U_0 = 4$  m/s

Podczas pomiarów wykonywanych w przeszłości (Skotniczny i in., 2011, 2012) wykazano, że maksymalną prędkością przepływu powietrza nad złożem porowatym uformowanym z kulek ballotyny, dla której można było uzyskać zbieżne wyniki z analizą numeryczną była  $U_0 = 3$  m/s. Powyżej tej prędkości obserwowano znaczne zawyżanie obliczonej numerycznie wartości prędkości powietrza w kolejnych przekrojach nad złożem. Obecnie, dla nowo powstałej komory pomiarowej, zdecydowano się na wykonanie eksperymentu dla prędkości  $U_0 = 4$  m/s. Pomiaru rozkładów prędkości średniej oraz fluktuacji jej wartości w interesujących przekrojach pomiarowych wzdłuż rzędu kulek zostały wykonane sondą termoanemometryczną jednowłóknową.



Rys. 12. Rozkład intensywności turbulencji  $T$  na szerokości  $W$  komory pomiarowej, na wysokościach odpowiednio 5, 10, 15, 20 i 25 mm nad dolną ścianą komory, dla prędkości w przestrzeni wlotowej  $U_0=4$  m/s

## 6. Analiza numeryczna zaproponowanej geometrii

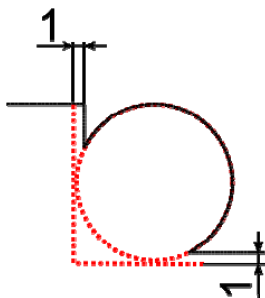
### 6.1. Uwagi wstępne

W oparciu o założenia z rozdziału 2 skonstruowano tzw. ‘domenę obliczeniową’ odnoszącą się do omawianej geometrii przepływu, dla której zostały przeprowadzone obliczenia z wykorzystaniem modeli opisanych w rozdziale 4. Ze względu na konieczność zastosowania gęstych siatek obliczeniowych zdecydowano się na rozpatrzenie przepływu dwuwymiarowego. Płaszczyzna rozpatrywanego przepływu została przeprowadzona w osi podłużnej komory, przez główną oś symetrii ciągu kulek.

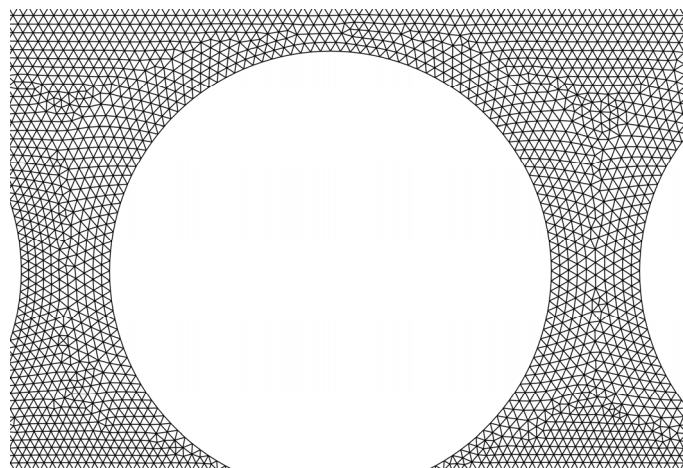
### 6.2. Opis geometrii oraz warunków brzegowych symulacji numerycznej

Struktura składa się z ułożonych w rzędzie dwudziestu kulek o średnicy  $D = 10$  mm, oddalonych od siebie o  $L = 2$  mm (rys. 4. szczegół S). Ze względu na kształt obszarów przy punktach styku kulka – płaszczyzna gniazda, generowała ona trudne do dyskretyzacji obszary. W związku z tym konieczne było wprowadzenie uproszczenia geometrii w tym zakresie (rys. 13). Modyfikacja polegała na zmniejszeniu w tworzonym modelu wymiarów gniazda o 1 mm z każdej ze stron. Zabieg ten umożliwił wykonanie siatki obliczeniowej o dobrych parametrach skośności elementów bez konieczności jej zagęszczania w newralgicznym obszarze.

Do obliczeń zastosowano model geometrii dyskretyzowany za pomocą siatki niestrukturalnej typu *tri-pave*, której fragment w otoczeniu jednej z kulek zaprezentowano na rys. 14. Całkowita liczba elementów w siatce wynosiła 4520000.

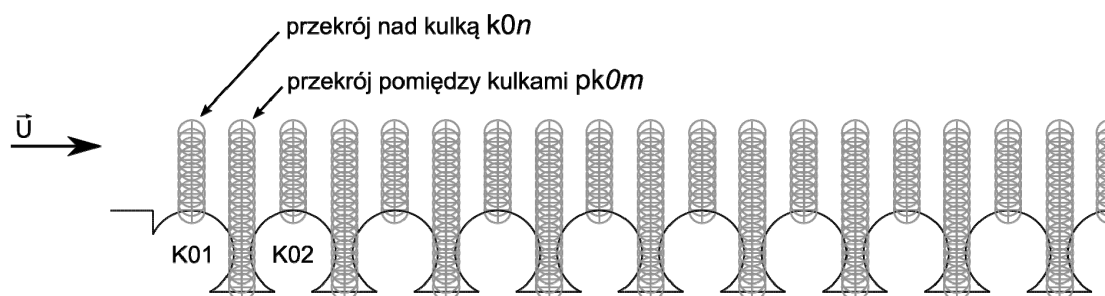


Rys. 13. Uproszczenie geometrii domeny obliczeniowej



Rys. 14. Fragment zastosowanej siatki obliczeniowej

Wyniki eksperymentu numerycznego podlegające analizie zawierały rozkłady prędkości oraz intensywności turbulencji w odpowiednich przekrojach pomiarowych dla linii sondowania rozmieszczonych według schematu zamieszczonego na rys. 15.



Rys. 15. Rozmieszczenie linii sondowania

W sumie utworzono 39 przekrojów pomiarowych, w których założono linie sondowania. Na rys. 15 przekroje opisane symbolem  $k0n$ , gdzie  $n = 1-20$  oznaczały linie sondowania umieszczone w osi kulki prostopadle do przepływu, natomiast przekroje oznaczone symbolem  $k0m$ , gdzie  $m = 1-19$ , oznaczały linie sondowania umieszczone w połowie szerokości odstepu  $L$  pomiędzy kulkami. Odległość pomiędzy poszczególnymi liniami sondowania wynosiła  $\Delta l = 12$  mm. Liczba punktów, z których pobierane były dane na liniach  $k0n$  wynosiła 10, natomiast na liniach  $pk0m$  wynosiła 20. Rozkład zarówno przekrojów pomiarowych jak i liczba punktów na liniach sondowania odpowiadały przekrojom oraz punktom uzyskanym z eksperymentu laboratoryjnego.

Warunki brzegowe, dla których zostały przeprowadzone obliczenia, przedstawiały się następująco:

- prędkość strugi powietrza na wlocie  $U_0 = 4$  m/s,
- intensywność turbulencji  $\theta = 1\%$ ,
- skala długości (*length scale*)  $L_s = 0.00122$  m,
- rozpatrywano niestacjonarny przepływ płynu lepkiego, nieściśliwego z krokiem czasowym  $\Delta t = 1.0E-5$  s.

### 6.3. Wyniki symulacji numerycznych

W pierwszym rzędzie należało dokonać wyboru modelu turbulencji odpowiedniego do rozwiązywania zagadnień przepływowych w założonej geometrii przepływu. Korzystając z doświadczeń zdobytych podczas poprzednich analiz (Skotniczny i in., 2011, 2012), z których wynikało, że rozkłady prędkości w przekrojach zbliżonych do wylotowego znacznie odbiegają od wartości prędkości zmierzonej, zdecydowano się na wykonanie testów porównawczych profilów prędkości średniej strugi powietrza leżących na linii sondowania znajdującej się w ostatnim przekroju pomiarowym –  $k20$ .

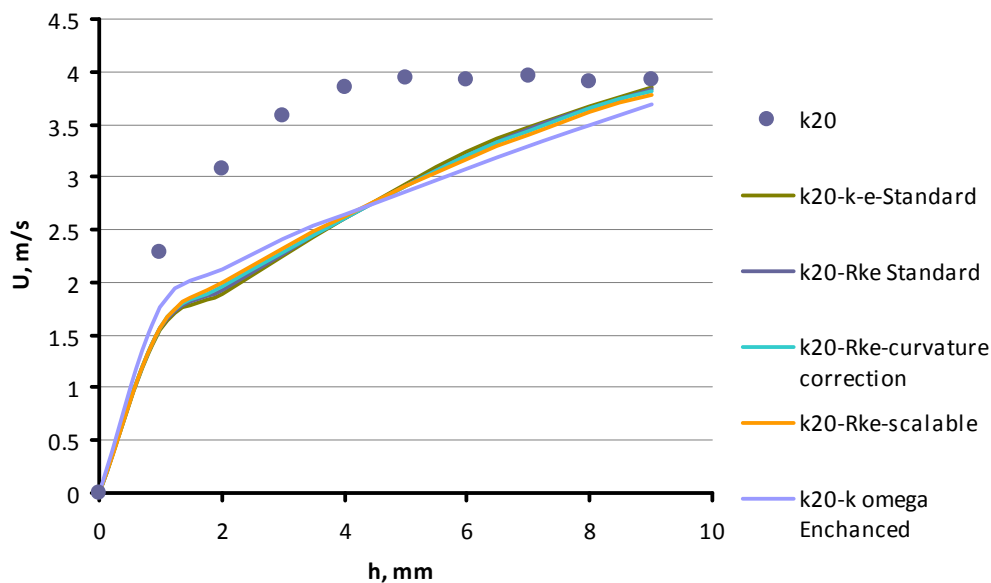
Analizie poddano 4 modele turbulencji z grupy  $K-\epsilon$ : model standardowy, *realizable*  $K-\epsilon$ , *realizable*  $K-\epsilon$  *curvature correction* (z korekcją krzywizn), *realizable*  $K-\epsilon$  *scalable* (ze skalowalną funkcją ściany) oraz jeden model  $K-\omega$  *enhanced* (z rozszerzoną funkcją ściany). Wszystkie zastosowane modele występowały z domyślnym zestawem współczynników empirycznych.

Zestawienie profilów uzyskanych z obliczeń numerycznych z profilem eksperymentalnym zamieszczono w postaci wykresów na rys. 18. Analizując zamieszczone rozkłady prędkości można łatwo zauważyć, że żaden z wymienionych modeli z grupy  $K-\epsilon$  a także model  $K-\omega$  nie umożliwiają uzyskania rozkładów prędkości charakteryzujących się zadowalającą zbieżnością z danymi eksperymentalnymi.

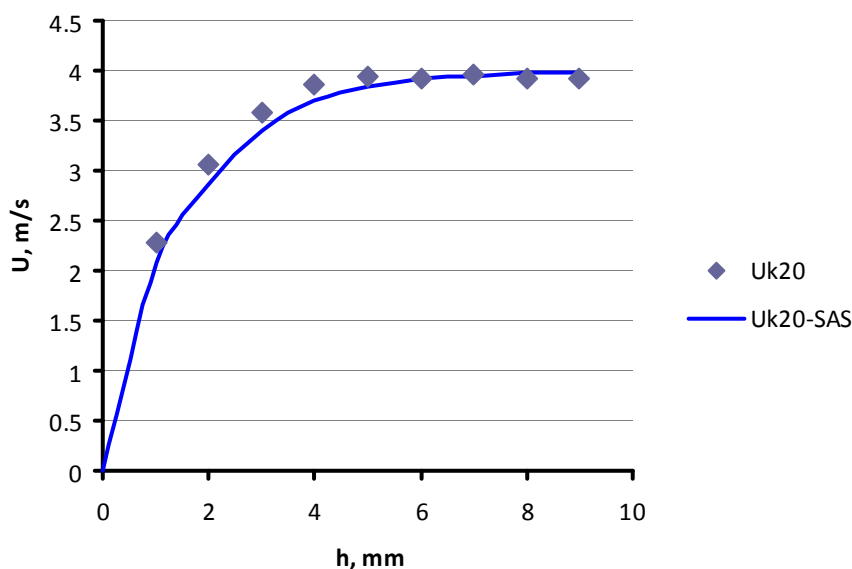
W związku z tym należy przyjąć, że omawiane modele turbulencji w postaci domyślnej (z niezmiennym zestawem współczynników empirycznych) nie nadają się do obliczeń w omawianej geometrii z powodu niedostatecznego odwzorowania przepływu.

Jako alternatywne rozwiązanie ‘ostatniej szansy’ wykonano obliczenia w oparciu o model SAS (*Scale-Adaptive Simulation*), którego opis znajduje się w rozdziale 4 niniejszego artykułu. Podobnie jak w poprzednim przykładzie model ten został zastosowany z domyślnym zestawem współczynników empirycznych.

Wyniki porównania pomiędzy przebiegiem wartości prędkości na linii sondowania leżącej w przekroju  $k20$  a danymi eksperymentalnymi zaprezentowano na rys. 20. W tym przypadku wartości uzyskane



Rys. 18. Zestawienie rozkładów prędkości dla różnych modeli turbulencji z profilem prędkości uzyskanym z danych eksperymentalnych

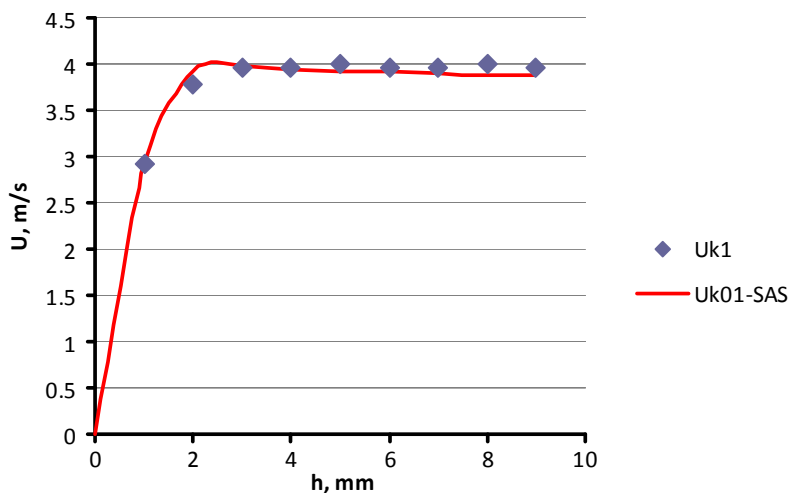


Rys. 20. Porównanie profilów prędkości numerycznego (linia ciągła) i eksperymentalnego (punkty) dla linii sondowania leżącej w przekroju k20

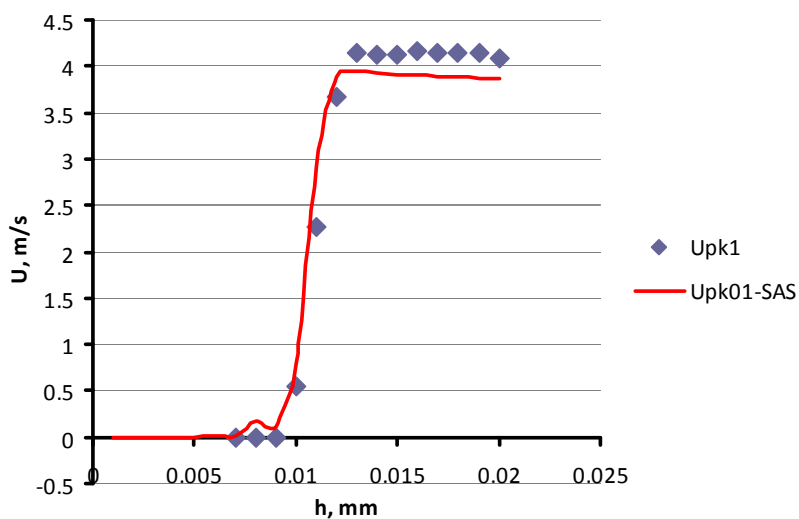
z obliczeń numerycznych w sposób nader zadawalający pokrywają się z wartościami eksperymentalnymi. Dobrą zbieżność wyników numerycznych i eksperymentalnych można zauważyć również na rys. 21, na którym zamieszczono porównanie profilów dla przekroju k01.

Rys. 22 przedstawia porównanie obliczonego rozkładu prędkości powietrza w przestrzeni między pierwszą a drugą kulką, tj. w przekroju pk1, z wynikami pomiarów. Uzyskano w tym przypadku generalnie dobrą zgodność. Wyliczony z symulacji komputerowej lokalny wzrost prędkości odpowiadający wysokości 0.008 m nie został z pozoru potwierdzony eksperymentalnie, gdyż czułość przyrządu pomiarowego była prawdopodobnie zbyt niska do zarejestrowania tak niewielkiego efektu.

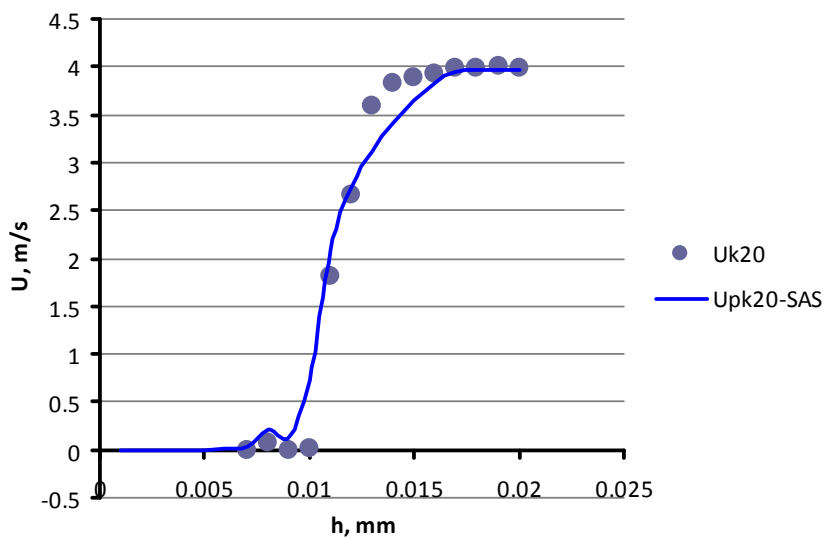
Rys. 23 przedstawia porównanie rozkładu prędkości powietrza w przestrzeni między przedostatnią a ostatnią kulką, tj. w przekroju pk19, obliczonego w wyniku symulacji numerycznej z wynikami pomiarów. W przeciwieństwie do sytuacji pokazanej na poprzednim rysunku, wyliczony z symulacji komputerowej lokalny wzrost prędkości odpowiadający wysokości 0.008 m został tutaj potwierdzony eksperymentalnie. Pewne rozbieżności wystąpiły natomiast na wysokości 0.014 m.



Rys. 21. Porównanie profili prędkości numerycznego (linia ciągła) i eksperymentalnego (punkty) dla linii sondowania leżącej w przekroju k01



Rys. 22. Rozkłady prędkości powietrza w przestrzeni między pierwszą a drugą kulką uzyskane w wyniku symulacji numerycznej (linia ciągła) oraz pomiarów eksperymentalnych (punkty)

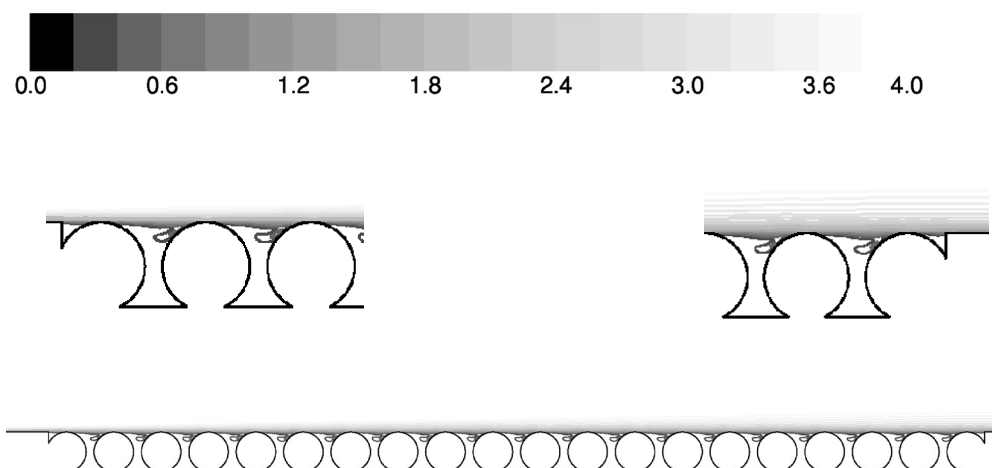


Rys. 23. Rozkłady prędkości powietrza w przestrzeni między przedostatnią a ostatnią kulką uzyskane w wyniku symulacji numerycznej (linia ciągła) oraz pomiarów eksperymentalnych (punkty)

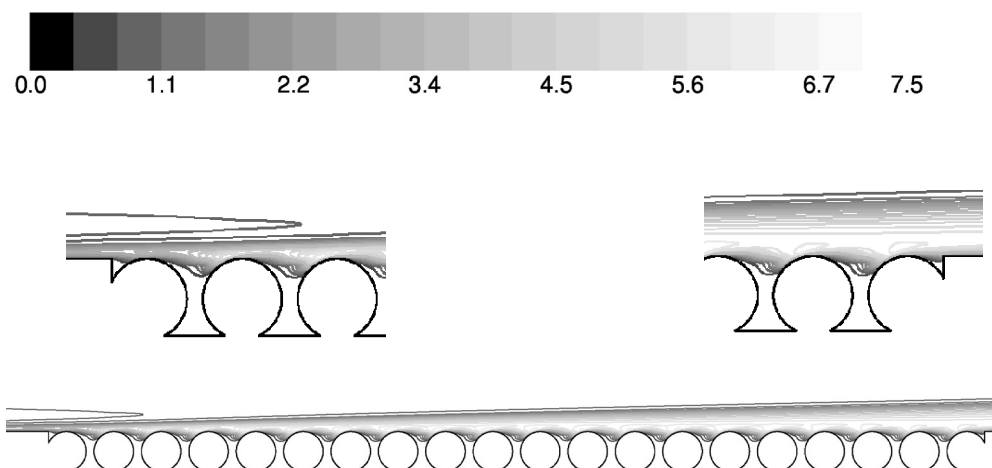


Reasumując, model SAS okazał się być skutecznym narzędziem obliczeniowym w omawianym przypadku. Potwierdza to pojawiająca się w literaturze tezę, że jest to metoda skuteczna w przypadkach obliczeń dotyczących problemów aerodynamicznych, z którymi nie radziły sobie inne modele.

Obraz przepływu w górnej części obszaru między kulkami otrzymany w wyniku symulacji numerycznych pokazany jest na rys. 24. Powstawanie obszarów recyrkulacyjnych generowanych przez zturbulizowany strumień strugi swobodnej jest tutaj wyraźnie widoczny. Rozkład intensywności turbulencji w rozważanym obszarze przedstawia rys. 25. Widać wyraźnie, że pomimo istnienia dyssypacji turbulentne struktury przenoszone są w sposób addytywny nad strukturą w kierunku zgodnym z zasadniczym strumieniem płynu.



Rys. 24. Obraz przepływu w postaci izolinii modułów prędkości średniej w górnej części obszaru między kulkami otrzymany w wyniku symulacji numerycznych



Rys. 25. Obraz przepływu w postaci izolinii intensywności turbulencji w górnej części obszaru między kulkami otrzymany w wyniku symulacji numerycznych

## 7. Podsumowanie

Przedstawiony w niniejszej pracy model okazał się być efektywny w odniesieniu do złożonego zagadnienia jakim jest przepływ turbulენტnej strugi nad obszarem o złożonej topologii. Efektywnie modelowany przepływ turbulენტny strugi swobodnej umożliwia skuteczne wygenerowanie obrazu przepływu w strefie łączącej modelu hybrydowego. Stosowany model SAS dla ruchu turbulენტnego okazał się być skutecznym narzędziem obliczeniowym w omawianym przypadku. Bieżące wyniki badań eksperymentalnych oraz obliczeń numerycznych napawają optymizmem.



## Podziękowanie

Niniejsza publikacja stanowi prezentację wyników uzyskanych w trakcie realizacji zadania T1Z1.3 *Czynniki wpływające na deformację warstwy przyściennej przy statycznym przepływie powietrza nad zło-żem porowatym oraz ich wpływ na prędkość poślizgu wykonywanego w ramach prac statutowych Instytutu Mechaniki Górotworu PAN w 2013 roku.*

## Literatura

- ARIS R., (1962): *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- BACHELOR G.K., (1947): *Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **43**, 533.
- BACHELOR G.K., (1953): *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BACHELOR G.K., TOWNSEND A.A., (1949): *The nature of turbulent motion at large wave-numbers*, Proceedings of the Royal Society (London), **A199**, 238.
- BEAVERS G.S., JOSEPH D.D., (1967): *Boundary conditions at naturally permeable wall*, Journal of Fluid Mechanics, **30**, 197.
- BOUSSINESQ J., (1868): *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, sér. II, **13**, 377.
- BOUSSINESQ J., (1877) : *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, **23**, (1), 1-680.
- BOUSSINESQ J., (1897): *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides*, Gauthier-Villars et fils, Paris.
- CHOU P.Y., (1945): *On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuations*, Quarterly of Applied Mathematics, **3**, 38.
- ELSNER J.W., (1987): *Turbulencja przepływów*, PWN, Warszawa.
- GATSKI T.B. , SPEZIALE C.G., (1993): *On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows*, Journal of Fluid Mechanics, **254**, 59.
- HELLSTEN A., (2005): *New Advanced k-omega Turbulence Model for High-Lift Aerodynamics*, AIAA Journal, **43**, 1857.
- HINZE J.O., (1959): *Turbulence*, McGraw-Hill, New York.
- VON KÁRMÁN T., (1930): *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*, Göttinger Nachr. Math. Phys. Kl., pp. 58 – 76.
- KOLMOGOROV A.N., (1941): *Lokalnaya struktura turbulentsii v nieszimaemykh vjazkikh zhidkostyakh dlya otchen velikikh tchisel Reynoldsa*, Doklady Akademii Nauk SSR, **30**: 299.
- KOLMOGOROV A.N., (1941): *Dissipaciya energii v lokalno izotropnoy turbulentsii*, Doklady Akademii Nauk SSR, **32**: 18.
- KOLMOGOROV A.N., (1942): *Uravneniya turbulentnovo dvizheniya nieszimaemoy zhidkosti*, Doklady Akademii Nauk SSR, Ser Phys., 6, Vol 1/2, 56.
- LANDAU L.D., LIFSHITS E.M., (1944): *Mekhanika sploshnykh sred*, Moskva, wydanie polskojęzyczne: *Mechanika ósrodków ciągłych*, Warszawa, (1958).
- LAUNDER B.E., REECE G.J., RODI W., (1975): *Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure*, Journal of Fluid Mechanics, **68**, 537.
- LIN C.C., (1946a): *On the stability of laminar flow. Part I*, Quarterly of Applied Mathematics, **3**, 117.
- LIN C.C., (1946b): *On the stability of laminar flow. Part II*, Quarterly of Applied Mathematics, **3**, 217.
- LIN C.C., (1946c): *On the stability of laminar flow. Part III*, Quarterly of Applied Mathematics, **3**, 277.
- MENTER F.R., (1992): *Improved two-equation k- $\omega$  turbulence model for aerodynamic flows*, NASA Report TM-103975.
- MENTER F.R., (1993): *Zonal Two Equation k- $\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows*, AIAA Paper 93-2906.
- MENTER F.R., (1994): *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*, AIAA Journal, **32**, 1598.
- MENTER, F.R., EGOROV Y., (2005): *A scale adaptative simulation model using two equations models*, 43 AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 10 – 13 January 2005.
- MENTER, F.R., KUNTZ, M., BENDER R., (2003): *A scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions*, AIAA Paper 2003-0767.
- SAIY M., (1974): *Turbulent mixing of gas streams*, PhD Thesis, Imperial College, University of London, (1974).
- REYNOLDS O., (1883): *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society, **174**, 935.
- SCHLICHTING H., (1965): *Grenzschicht-Theorie*, Braun, Karlsruhe.
- SCHMIDT F., (2007): *About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity*, Comptes Rendus Mécanique, **335**, 417.

- SKOTNICZNY P., (2011): *Określenie prędkości poślizgu przy stycznym przepływie powietrza nad złożem porowatym*, Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN, **12**, 183.
- SKOTNICZNY P., SŁAWOMIRSKI M.R., (2012): *Czynniki wpływające na deformację warstwy przyściennej przy statycznym przepływie powietrza nad złożem porowatym oraz ich wpływ na prędkość poślizgu. Część II: Badania eksperymentalne*, Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN, **14**, .
- SŁAWOMIRSKI M.R., SKOTNICZNY P., (2012): *Czynniki wpływające na deformację warstwy przyściennej przy statycznym przepływie powietrza nad złożem porowatym oraz ich wpływ na prędkość poślizgu. Część I: Turbulentna warstwa graniczna nad złożem chropowatym*, Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN, **14**, .
- SPALART, P.R., ALLMARAS, S.R., (1994): *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*, La Recherche Aerospaciale, **1**, 5.
- SPALDING D.B., (1979): *Mathematical models of turbulent transport processes*, HTS/79/2, Imperial College, Mechanical Engineering Department.
- SPEZIALE C.G., ABID R., ANDERSON E.C., (1990): *A critical evaluation of two-equation turbulence models for near-wall turbulence*, AIAA Paper 90-1481.
- SPEZIALE C.G., SARKAR S., GATSKI T.B., (1991): *Modeling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence: an Invariant Dynamical Systems Approach*, Journal of Fluid Mechanics, **227**, 245.
- WALLIN S., JOHANSSON A.V., (2000): *An Explicit Algebraic Reynolds Stress Model for Incompressible and Compressible Turbulent Flows*, Journal of Fluid Mechanics, **403**, 89.
- WILCOX, D.C., (1988): *Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*, AIAA Journal, vol. 26, no. 11, pp. 1299-1310.
- WILCOX, D.C., (2006): *Turbulence Modeling for CFD*, 3rd Edition, DCW Industries.
- WILCOX, D. C., (2008): *Formulation of the k-omega Turbulence Model Revisited*, AIAA Journal, **46**, 2823.

## Hybrid model of a porous medium

### Abstract

Unlike the flow near the impermeable walls, the tangent flows of a real fluid over a porous medium displaying the permeability and porosity features will reveal the non-zero flow velocity on the free stream-porous medium boundary. This process determines the actual shape of velocity profiles near the separation place and the actual form of mass exchange between the porous medium and the stream of fluid flowing over it. An accurate description of the non-zero velocity effect at the phase boundary, also referred to as the slippage velocity, is still lacking because of major differences in equations of motion governing the fluid flow in the free stream and in a porous medium. Over the years numerous theories have appeared and attempts have been made to introduce a combined function so that the equations of motion should be solved simultaneously both in the outer region (the free stream) and in the inner one (porous medium). In each case the form of the combined function proved unsatisfactory or limited to a narrow category of flows. Development of numerical methods to be used in solving of complex flow problems makes the solution of the described problem possible. In the classical approach whereby the flow model involved strictly separated flow regions: the outer region (free stream) and the inner region (seepage flow), the turbulent flow parameters for flows near the semipermeable phase boundary were determined incorrectly as a consequence of a certain inadequacy of available models.

In this study the Authors put forward a concept of a numerical hybrid model of a porous medium composed of balls of identical diameter, whose permeability and porosity can be easily determined. The model is complete with an additional layer providing a geometrical connection between the outer and inner flow regions and surrounded by a single row of uniformly distributed balls of a specified diameter. Accordingly, the motion there will be governed by the Navier-Stokes equations ( and for turbulent flows -by the Reynolds equation). The inner zone is modelled as the conventional filtration flow region. The row of uniformly distributed balls, having no contact with one another, acts as a turbulence –maker, thus introducing the parameters that were lacking: kinetic energy production and dissipation in the vicinity of thus created semipermeable boundary plane.

Accordingly, the boundary parameters for the porous medium governed by the Forchheimer equations are velocities and pressure distributions obtained by solving the Navier-Stokes equations.

**Keywords:** turbulence, boundary slip, scale adaptative simulation (SAS model), flows through porous materials, hybrid models