Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN
Tom 7, nr 3-4, (2005), s. 295-300

Ocena zagrożeń naturalnych w kopalni a decyzje w warunkach ryzyka

TADEUSZ CYRUL

Instytut Mechaniki Górotworu PAN, ul. Reymonta 27; 30-059 Kraków

Streszczenie

W artykule podjęto próbę skonstruowania miernika pozwalającego na ocenę zagrożeń naturalnych w kopalni podziemnej. Do konstrukcji miernika wykorzystano teorię decyzji i teorię gier statystycznych. Na konkretnych danych zaprezentowano przykład liczbowy wykorzystania opracowanego modelu do podejmowania decyzji o zakwalifikowaniu oprobowanego złoża do kategorii zagrożenia

Słowa kluczowe: identyfikacja, ryzyko, niepewność, zagrożenie, decyzja, prawdopodobieństwo, prognoza, przyczyna, skutek, zdarzenie niebezpieczne

1. Wprowadzenie

Procesowi eksploatacji (szczególnie podziemnej) surowców naturalnych towarzyszy wiele procesów fizycznych i chemicznych np. tąpnięcia, zawały, wyrzuty skalno-gazowe, itp., które w wielu przypadkach objawiają się nagłym i niekontrolowanym wyładowaniem energii prowadząc do ofiar ludzkich i znacznych zniszczeń materialnych. Badania tych zjawisk są utrudnione nie tylko ze względu na ich wewnętrzną złożoność, ale również ze względu na specyfikę działalności wydobywczej. Ocena ryzyka związanego z tymi zdarzeniami jest bardzo trudna, gdyż prawie niemożliwe jest uwzględnienie wszystkich czynników np. geologicznych lub związanych z eksploatacją kopalni czy błędami ludzkimi, ale konieczna ze względu na funkcjonowanie tego typu przedsiębiorstw z punktu widzenia finansowego.

Celem tej pracy jest konstrukcja metody (opartej na teorii gier statystycznych) oceny zagrożeń w tego typu specyficznej działalności. Przedmiotem rozważań będzie model stanowiący element ogólnej teorii podejmowania decyzji w warunkach częściowej niepewności, w jakiej znajduje się decydent. Model gry statystycznej, będącej podstawą podejmowania decyzji w takich sytuacjach, wiąże się ściśle z modelem gry strategicznej dwuosobowej tj. człowieka z naturą, o sumie zerowej, z dodatkowa informacja o strategiach natury. Podstawowymi pojęciami teorii gier strategicznych dwuosobowych są: strategie graczy oraz funkcja wypłat w grze. Strategia gracza to reguła określająca wybór przez gracza poszczególnego jego ruchu. Zbiór strategii to zbiór wszystkich możliwych alternatywnych poczynań, jakie może on podjąć jako swój ruch. Funkcja wypłat to funkcja przyporządkowująca każdej wybranej przez obu graczy strategii wypłatę przypadającą graczowi pierwszemu od drugiego gracza.

2. Model teoretyczny oceny zagrożenia

2.1. Ogólna postać modelu oceny zagrożenia

Załóżmy, że dla konkretnego zagrożenia (np. wyrzutu skalno-gazowego) ustalono zespół mierzalnych cech mających wpływ na wystąpienie danego zjawiska powodującego straty materialne i ludzkie w procesie wydobywczym. Z matematycznego punktu widzenia stan zagrożenia możemy traktować jako wektor $S = (p_1, p_2, ,..., p_r)$, którego każda składowa jest wartością pewnej mierzalnej cechy j (p_j możemy uznać jako zmienne losowe). Załóżmy, że są to zmienne niezależne o rozkładzie typu ciągłego, określone w skończonym przedziale $[a_j, b_j]$. Każdy taki przedział można zamienić na unormowany przedział [0,1] za pomocą przekształcenia

$$x_j = \frac{p_j - a_j}{b_j - a_j} \quad \text{lub} \quad x_j = \frac{b_j - p_j}{b_j - a_j}$$

Jeżeli p_j jest zaobserwowaną wartością cechy j (należącą do przedziału $[a_j, b_j]$), to odpowiada jej jednoznacznie pewna unormowana wartość $x_j \in [0,1]$.

Stan zagrożenia można określić jako unormowany wektor $\theta = (x_1, x_2, ,..., x_r) \in \Omega$, gdzie Ω jest r-wymiarowym zbiorem.

Załóżmy, że statystyk-analityk ma orzec, czy istnieje zagrożenie wystąpienia danego niepożądanego zjawiska w czasie procesu wydobywczego. Wprowadźmy dwa stany: 0 stopień zagrożenia i I stopień zagrożenia. Ze względu na cel badania przyjmijmy podział zbioru Ω na dwa podzbiory rozłączne Ω_0, Ω_1 tj. $\forall ij, i \neq j : \Omega_i \wedge \Omega_j = 0$ takie, że $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ i mówimy o 0 (zerowym) stopniu zagrożenia jeżeli $\theta \in \Omega_0$, o stopniu 1 (pierwszym) jeżeli $\theta \in \Omega_1$.

Określmy miernik zagrożenia następująco:

$$M = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j , \quad \text{gdzie} \quad 0 < \alpha_j < 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1 \tag{1}$$

Problem polega na obiektywnym doborze α_j tak, aby zminimalizować szkody spowodowane ewentualną błędną oceną zagrożenia. W celu wyznaczenia w sposób obiektywny wag α_j rozważmy grę statystyczną (Ω, D, R), gdzie Ω jest przestrzenią stanów natury, D zbiorem funkcji decyzyjnych przekształcających r-wymiarową przestrzeń prób w przestrzeń decyzji, a R funkcją ryzyka.

Najpierw rozważmy strukturę gry strategicznej (Ω, A, L), gdzie graczem pierwszym jest natura, której strategiami są różne wartości rzeczywistego poziomu zagrożenia tj. $\theta = (x_1, x_2, ,..., x_r) \in \Omega$, a graczem drugim jest statystyk odpowiedzialny za ocenę tego zagrożenia na podstawie zgromadzonych informacji. Strategiami niezrandomizowanymi gracza drugiego są różne wartości miernika zagrożenia M w zależności od wartości wag α_j ($M \in [0,1]$). Liczby M, będące wartościami miernika zagrożenia, są decyzjami statystyka. Niech $A \in [0,1]$ będzie zbiorem możliwych decyzji statystyka. Załóżmy, że zbiór A został podzielony na n przedziałów takich, że $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ i $\forall i, j \in N^+ \cup \{0\}, \quad i \neq j : A_i \cap A_j \neq 0$ (np. przez grupę ekspertów).
Przedział A_0 jest takim zbiorem, że jeżeli $M \in A_0$, to statystyk-analityk podejmuje decyzję, że mamy 0 stopień zagrożenia, $M \in A_1$, to 1 stopień zagrożenia itd.

Trzecim elementem gry (Ω, A, L) jest funkcja strat $L(\theta, M)$, jakie ponosi statystyk-analityk reprezentujący przedsiębiorstwo, gdy błędnie określi stan zagrożenia.

Niech funkcja strat będzie określona następująco:

Tab. 1.

θ \ M	$M \in A_0$	$M \in A_1$	$M \in A_2$		$M \in A_n$
$\theta \in \Omega_0$	0	z_{01}	z_{02}	...	z_{0n}
$\theta \in \Omega_1$	k_{10}	0	z_{12}	...	z_{1n}
$\theta \in \Omega_2$	k_{20}	k_{21}	0	...	z_{2n}
...	...	...	...	0	...
$\theta \in \Omega_n$	k_{n0}	k_{n1}	k_{n2}	...	0

gdzie

z – zysk,
k – koszt.

Wartości tej funkcji określmy jako wypłaty przypadające graczowi I od gracza II, czyli statystyka-analityka reprezentującego przedsiębiorstwo w omawianej grze strategicznej (Ω, A, L) z naturą.

Następnym etapem konstrukcji modelu pozwalającego badać zagrożenia jest przejście z gry strategicznej na odpowiednią grę statystyczną (Ω, D, R), wykorzystując informację statystyczną jaką posiada statystyk-analityk tzn. zaobserwowany wektor $(x_1, x_2, ..., x_r)$ wartości r niezależnych zmiennych losowych o rozkładach ciągłych określonych w przedziale [0,1].

Poszczególne funkcje decyzyjne $d \in D$ różnią się od siebie wartościami liczb α_j, $j = 1, 2, ..., r$ w mierniku M, więc wybór optymalnej funkcji decyzyjnej, to wybór optymalnego układu wag α_j. Skoro miernik M jest wypukłą kombinacją zmiennych losowych x_j, to jest on również zmienną losową o rozkładzie określonym w przedziale [0,1], a zależnym od przynależności wektora θ do jednego ze zbiorów $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_n$. Zatem funkcja straty $L(\theta, M)$jest też zmienną losową, czyli możemy obliczyć dla niej wartość oczekiwaną, tj. funkcję ryzyka, dla danego układu wag α_j.

$$R(\theta, d) = EL(\theta, M) = \int_A L(\theta, M)\, dF(M, \theta) \tag{2}$$

gdzie $F(M, \theta)$ jest dystrybuantą warunkowego rozkładu zmiennej M, wyznaczoną z warunkowych rozkładów x_j, przy warunkach $\theta \in \Omega_i$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

W ten sposób została określona struktura gry statystycznej (Ω, D, R) dla problemu oceny zagrożeń.

Biorąc pod uwagę częstość stosowania funkcji decyzyjnej, tj. miernika zagrożenia M do bieżącej kontroli, za optymalną funkcję decyzyjną należy uznać bayesowską funkcję decyzyjną, którą możemy znaleźć przyjmując rozkład a priori stanów natury. Będzie to skokowy rozkład prawdopodobieństwa występowania poszczególnych stanów zagrożenia. Na podstawie odpowiedniego eksperymentu statystycznego można oszacować dwa prawdopodobieństwa:

$$P\{\theta \in \Omega_0\} = p_0,\ P\{\theta \in \Omega_1\} = p_1,\ ...,\ P\{\theta \in \Omega_n\} = p_n \tag{3}$$

Przyjmując taki rozkład a priori ξ, można wyznaczyć ryzyko bayesowskie $r(\xi, d)$.

$$r(\xi, d) = ER(\theta, d) \tag{4}$$

Określone w ten sposób ryzyko bayesowskie $r(\xi, d)$ jest funkcją szukanych wag α_j, ponieważ funkcja ryzyka $R(\theta, d)$ jest funkcją zmiennych α_j.

Optymalną bayesowską funkcję decyzyjną d^*, wyznaczającą obiektywnie wagi α_j w mierniku $M = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j$, należy znaleźć poprzez minimalizację ryzyka bayesowskiego $r(\xi, d)$, względem α_j ($j = 1, 2, ..., r$) przy warunku $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1$, stosując np. mnożniki Lagrange'a. Uzyskana w ten sposób bayesowska funkcja decyzyjna d^*, względem przyjętego rozkładu a priori $\xi = (p_0, p_1, ..., p_n)$, wyznacza najlepszy miernik zagrożenia. Wartość ryzyka bayesowskiego $r(\xi, d)$ dla bayesowskiej funkcji decyzyjnej d^*, wyznaczającej optymalny układ wag α_j, zależy od przyjętego podziału zbioru $A = [0,1]$ na przedziały $A_0, A_1, ..., A_n$. Należy więc jako najlepszy uznać taki podział zbioru A, dla którego bayesowskie ryzyko jest najmniejsze i dla tego najlepszego podziału zbioru A otrzymane rozwiązanie (układ wag α_j) przyjąć za optymalne.

2.2. Metoda wyznaczenia funkcji ryzyka $R(\theta, d)$ występującej w modelu oceny zagrożeń

Ze względu na przyjętą definicję funkcji straty (tabela 1.) funkcja ryzyka będzie określona różnie dla dwóch przypadków $\theta \in \Omega_0, \theta \in \Omega_1, ..., \theta \in \Omega_n$:

- dla $\theta \in \Omega_0$

$$R^0(\theta, d) = \sum_{j=1}^{n} [z_{0j} \cdot P(M \in A_j / \theta \in \Omega_0)] = \sum_{j=1}^{n} [z_{0j} \cdot \int_{A_j} f^0(M / \theta \in \Omega_0)\, dM$$

- dla $\theta \in \Omega_1$

$$R^1(\theta, d) = k_{10} \cdot P\{M \in A_0 / \theta \in \Omega_1\} + \sum_{j=2}^{n} (z_{1j} \cdot P\{M \in A_j / \theta \in \Omega_1) =$$

$$= k_{10} \cdot \int_{A_0} f^1(M / \theta \in \Omega_1) dM + \sum_{j=2}^{n} (z_{1j} \cdot \int_{A_j} f^1(M / \theta \in \Omega_1) dM$$

- dla $\theta \in \Omega_2$

$$R^{II}(\theta, d) = \sum_{j=0}^{I} [k_{2j} \cdot P\{M \in A_j / \theta \in \Omega_2\}] + \sum_{j=3}^{n} (z_{2j} \cdot P\{M \in A_j / \theta \in \Omega_2\}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1} (k_{2j} \cdot \int_{A_0} f^{II}(M / \theta \in \Omega_2) dM + \sum_{j=3}^{n} (z_{2j} \cdot \int_{A_j} f^{II}(M / \theta \in \Omega_2) dM$$

itd.,

- dla $\theta \in \Omega_n$

$$R^n(\theta, d) = \sum_{j=0}^{n-I} [k_{nj} \cdot P\{M \in A_j / \theta \in \Omega_n\}] = \sum_{j=0}^{n-I} (k_{nj} \cdot \int_{A_j} f^n(M / \theta \in \Omega_n) dM$$

gdzie $f^0(M/\theta \in \Omega_0)$ i $f^1(M/\theta \in \Omega_1), ..., f^n(M/\theta \in \Omega_n)$ są funkcjami gęstości warunkowych rozkładów zmiennej M.

Aby wyznaczyć te funkcje gęstości należy dokonać odpowiedniej transformacji łącznego rozkładu zmiennych $(x_1, x_2, ..., x_r)$ wykorzystując założenie niezależności tych zmiennych lub skorzystać z własności funkcji charakterystycznej rozkładu prawdopodobieństwa.

Niech funkcje

$$f_1^0(x_1/\theta \in \Omega_0), ..., f_r^0(x_r/\theta \in \Omega_0)$$
$$f_1^I(x_1/\theta \in \Omega_1), ..., f_r^I(x_r/\theta \in \Omega_1)$$
$$f_1^{II}(x_1/\theta \in \Omega_1), ..., f_r^{II}(x_r/\theta \in \Omega_1)$$
$$...$$
$$f_1^n(x_1/\theta \in \Omega_1), ..., f_r^n(x_r/\theta \in \Omega_1)$$

będą funkcjami gęstości warunkowych rozkładów zmiennych x_j ($j = 1, 2, ..., r$) wyznaczonych np. na podstawie eksperymentu statystycznego. Skoro znane są rozkłady niezależnych zmiennych losowych x_j, to znane są również ich funkcje charakterystyczne

$$\varphi_{xj}(t) = Ee^{itX_j} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, ..., r.$$

Skoro zmienna $M = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j$, to wykorzystując własności funkcji charakterystycznej[1] możemy napisać

$$\varphi_M(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j}(t) = \prod_{j=1}^{r} \varphi_{\alpha_j x_j}(t) = \prod_{j=1}^{r} \varphi_{x_j}(\alpha_j t) \tag{5}$$

[1] Funkcje charakterystyczne posiadają własności:
a) jeżeli X jest zmienną losową i $\alpha \in R$, to $\varphi_{\alpha X}(t) = \varphi_X(\alpha t)$,
b) jeżeli zmienne losowe X_j, $j = 1, 2, ..., r$ są niezależne, to $\varphi_{\sum_{j=1}^{r} x_j}(t) = \prod_{j=1}^{r} \varphi_{x_j}(t)$.

Celem naszych poszukiwań są rozkłady warunkowe zmiennej M dla dwóch warunków: $\theta \in \Omega_1$, $\theta \in \Omega_1$, ..., $\theta \in \Omega_n$ czyli we wzorze (5) należy przyjąć funkcje charakterystyczne φ_{xj}, dla $j = 1,2, ..., r$, również warunkowych rozkładów zmiennych x_j. Tak otrzymanej funkcji charakterystycznej odpowiada funkcja gęstości postaci:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itM}\varphi_M(t)dt$$

Prostą konsekwencją jest wyznaczenie funkcji gęstości rozkładów warunkowych zmiennej M, a co za tym idzie funkcję ryzyka.

3. Przykład zastosowania modelu teoretycznego oceny zagrożenia dla zjawiska wyrzutu skalno-gazowego

Niech przedmiotem badania będzie ocena zagrożenia wystąpienia zjawiska wyrzutu skalno-gazowego w procesie wydobycia węgla kamiennego. Celem oceny jest zakwalifikowanie zachowania się natury ze względu na możliwość wystąpienia tego zdarzenia, do jednego z dwóch stanów: 0 stopień zagrożenia (nie występuje zagrożenie wyrzytem skalno-gazowym), I stopień zagrożenia (występuje realne zagrożenie wyrzutem skalno-gazowym).

Wprowadźmy założenia. Niech badanymi cechami będą[2]:

1. Dp (desorpcja [mm H_2O)]),
2. CO_2 (gazonośność ze względu na CO_2 [m^3/t]).

Niech $x_1, x_2 \in [0,1]$ oznaczają unormowaną wartość odpowiednio: desorpcji, gazonośności ze względu na CO_2 jakie otrzymano w wyniku pomiaru[3]. Niech $\theta = (x_1, x_2) \in \Omega$ oznacza wektor poziomu zagrożenia, gdzie Ω jest dwuwymiarową kostką o bokach długości 1 (kwadratem). Niech podział zbioru Ω na zbiory Ω_0, Ω_1 będzie następujący:

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} \le x_1 \le 1, \frac{1}{2} \le x_2 \le 1\},$$

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_1.$$

Zgodnie z założeniami modelu prezentowanego w tej pracy miernik zagrożenia wyrzutem skalno-gazowym jest postaci:

$M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ i $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Wartość tego miernika $M \in [0,1] = A$, który możemy przedstawić jako sumę zbiorów A_0, A_1, tzn. $A = A_0 \cup A_1$, gdzie np. $A_0 = [0, \frac{1}{2})$ oraz $A_1 = [\frac{1}{2},1]$. Jeżeli $M \in A_0$, to statystyk-analityk podejmuje decyzję, że $\theta \in \Omega_0$, tzn. nie ma zagrożenia wyrzutem skalno-gazowym, w przeciwnym razie tzn. $M \in A_1$ statystyk-analityk może stwierdzić realne zagrożenie. Załóżmy dalej, że z danych eksperymentu statystycznego oszacowano rozkład a priori występowania poszczególnych stanów zagrożenia[4]:

$$P\{\theta \in \Omega_0\}, P\{\theta \in \Omega_1\}$$

oraz warunkowe rozkłady zmiennych x_1, x_2 przy warunkach $\theta \in \Omega_0$ oraz $\theta \in \Omega_1$ (biorąc pod uwagę histogramy wartości cech wyrzutowych zaprezentowane w pracy [Cyrul T., s. 66, 1992] można założyć, że rozkład tych cech jest zbliżony do rozkładu beta [DeGroot M.H., s. 39, 1981]). Przypuśćmy, że na podstawie danych

---

[2] W pracy [Cyrul T., s. 75] autor poprzez wnikliwą analizę zjawiska wyrzutu skalno-gazowego opartą na odpowiedniej ilości danych empirycznych, wykazał związki i siłę wpływu różnych cech charakteryzujących złoże np.: Dp – desorpcja [mm H_2O], CO_2 – gazonośność ze względu na CO_2 [m^3/t], P – ciśnienie równowagi [kPa], CH_4 – gazonośność ze względu na CH_4 [m^3/t] i innych, na wystąpienie wyrzutu.

[3] W pracy [Cyrul T., s. 53] autor prezentuje przedziały zmienności cech złożowych w ROW i DZW.

[4] W pracy [Cyrul T., Cygan J., 1991] zostały opracowane programy bazy danych gromadzonych w DZW i ROW. W przypadku DZW są to dwa programy: program WYRZUT dla danych charakteryzujących wyrzuty skalno-gazowe i program DZW dla danych charakteryzujących złoże, gdzie wyrzut nie wystąpił.

empirycznych, odpowiedniego oprogramowania (np. Statistica, Statgraphics, Mathematica) otrzymaliśmy układ wag α_1, α_2 taki, że $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ minimalizujący bayesowskie ryzyko $r(\xi, d)$, np. $\alpha_1 = 0{,}54$, $\alpha_2 = 0{,}46$ – co oznacza, że miernik zagrożenia zjawiskiem wyrzutu skalno-gazowego jest równy

$$M = 0{,}54x_1 + 0{,}46x_2 \tag{8}$$

Jeżeli więc np. $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}6$ to wykorzystując miernik (8) otrzymujemy $M = 0{,}384$, tzn. $M \in A_0$ czyli statystyk-analityk podejmuje decyzję, że nie występuje zagrożenie wyrzutem.

4. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynikają następujące wnioski:

a) opracowany model nadaje głęboki sens danym pomiarowym gromadzonym w przeszłości w obszarach zagrożonych oraz stanowi motywację do kontynuowania tych pomiarów,
b) prezentowany model ma charakter uniwersalny i może być wykorzystywany do prognozowania różnych zagrożeń,
c) cechą charakterystyczną opracowanego modelu jest to, że utożsamia zagrożenie z przestrzenią przyczyn, a nie z przestrzenią górotworu.

Literatura

Cyrul T., Cygan J., *Programy gromadzenia przetwarzania danych w kopalniach gazowych,* cz. I*: Programy bazy danych* (w:) J. Litwiniszyn (red.): *Górotwór jako ośrodek wielofazowy. Wyrzuty skalno-gazowe,* Wyd. AGH, t. 3, Kraków 1991, s. 979-989.

Cyrul T., *Elementy prognozowania wyrzutów skalno-gazowych i gazonośności w ujęciu geostatycznym,* Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Kraków 1992, nr 160.

DeGroot M.H, *Optymalne decyzje,* PWN, Warszawa 1981.

Assessment of Natural Hazards in Mines and Decisions under Risk

Abstract

In the paper an attempt was undertaken to construct a measure which allows for evaluation of natural hazards in an underground mine. For the construction, the theory of decisions and the theory of statistical games was applied. For given data a numerical example was presented using the evaluated model for making decisions on qualification of the sampled deposit to an adequate hazard category.

Keywords: identification, risk, uncertainty, hazard, decision, probability, prognosis, cause, effect

Recenzent: Doc. dr hab. inż. *Grzegorz Kortas*, Instytut Mechaniki Górotworu PAN