

# Analiza przepływów laminarnych w ośrodkach szczelinowych z uwzględnieniem efektów na styku szczelin

MARIUSZ R. SŁAWOMIRSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN, ul. Reymonta 27; 30-059 Kraków

## Streszczenie

Rozważono przepływy płynów przez szczeliny, ciągi szczelin oraz układy przecinających się szczelin. Przyjęto, że każda szczelina może składać się z ciągu 'podszczelin' o odmiennych długościach, miąższościach i głębokościach. W związku ze smukłością szczelin występujących w górotworze, zwłaszcza na większych głębokościach (miąższość szczelin jest tu niemal zawsze kilka rzędów wielkości mniejsza od ich długości), założono, że ruch płynu w systemie szczelin ma charakter laminarnego przepływu pełzającego (ang. *creeping flow*), w którym efekty bezwładnościowe oraz związane z powstawaniem wirów są pomijalnie małe w porównaniu z efektami związanymi z lepkością płynu. W przypadku, gdy ścianki 'podszczeliny' nie są całkiem równoległe, jej miąższość zastąpiono miąższością zastępczą wyznaczaną na podstawie parametrów geometrycznych podszczeliny. Okolice punktów styku szczelin aproksymowano kombinacją walców hiperbolicznych oraz nachylonych płaszczyzn. Rozważono przepływy w układach szczelin o różnej topologii: ciągi szczelin złożone z podszczelin, systemy ortogonalnych przecinających się szczelin, systemy tzw. quasi-nieregularnych szczelin. Pseudo-ortogonalny układ szczelin otrzymuje się z układu ortogonalnego poprzez transformację homeomorficzną jego topologii. Quasi-nieregularny układ szczelin otrzymuje się w sposób niehomeomorficzny z układu pseudo-ortogonalnego poprzez wprowadzanie dodatkowych szczelin diagonalnych i antydiagonalnych łączących bezpośrednio nie sąsiadujące ze sobą węzły siatki pseudo-ortogonalnej. Wprowadzenie tzw. parametrów istnienia oraz zmiana w indeksacji węzłów pozwala wówczas na opisanie bardzo szerokiej klasy występujących w górotworze układów szczelinowych o różnej topologii. W pracy przedstawiono sposób wyznaczania ciśnienia w każdym węzle siatki, a także prędkości średniej oraz natężenia przepływu dla każdej z podszczelin wchodzących w skład układu przy zadanych warunkach brzegowych. Zwrócono uwagę na problem tzw. kanałów preferencyjnych. W zastosowanym sposobie podejścia do problemu anizotropia ośrodka oraz istnienie kanałów preferencyjnych pojawiają się w sposób naturalny i wynikają one z niejednorodności geometrycznych parametrów szczelin. Wykazano, że hydrodynamiczna anizotropia ośrodka nie musi wynikać z określonej przestrzennej orientacji większości szczelin, lecz może być konsekwencją jedynie niejednorodności ich parametrów geometrycznych.

**Słowa kluczowe:** hydrodynamika podziemna, układy szczelinowe, przepływ pełzający, modelowanie matematyczne

## 1. Ośrodki szczelinowe

Przepływy w ośrodkach szczelinowych spotykane są powszechnie zarówno w środowisku naturalnym jak rozmaitych urządzeniach technicznych. Wiele rodzajów ośrodków zbudowanych z ciał stałych posiada znikomą porowatość, są one jednak wyraźnie uszczelinione, co powoduje, że są przepuszczalne dla cieczy i gazów. Przykładem są tutaj skały typu węglanowego – wapień i dolomity, o niewielkiej na ogół porowatości, w których bloki litej skały, zwanej niekiedy hydrodynamicznego punktu widzenia *matrycą* (ang. *matrix*) pooddzielane są od siebie skomplikowanym systemem szczelin.

Wielkie kompleksy ośrodków szczelinowych utworzone zostały w sposób naturalny w postaci warstw skalnych zalegających na rozmaitych głębokościach. Płyny zmagazynowane w tych warstwach, jak woda pitna, ropa naftowa, czy gaz ziemny stanowią cenne surowce, wykorzystywane przez człowieka w ogromnej skali. Dlatego też analiza przepływów płynów w ośrodkach szczelinowych jest szczególnie interesująca z punktu widzenia górnictwa, przemysłu naftowego oraz zaopatrzenia miast w wodę.

W niniejszej pracy ośrodek szczelinowy traktowany będzie jako składający się z boków matrycy oddzielonych systemem połączonych szczelin tworzących przestrzeń szczelinową. Natomiast porowatość

bloków matrycy uznawana będzie za pomijalnie małą. Tym samym zarówno magazynowanie jak i transport płynów odbywać się będzie jedynie systemem połączonych szczelin.

Przyjmować będziemy, że każda ze szczelin posiada swoje określone parametry geometryczne, jak długość  $l$ , miąższość  $2h$  oraz głębokość  $g$ . Przyjmować będziemy, że przepływ płynu odbywa się zgodnie z kierunkiem długości szczeliny. Rozważania ograniczymy do szczelin smukłych, tj. takich, których długość jest kilka rzędów wielkości większa od miąższości ( $2h/l \ll 0.01$ ), gdyż jedynie tego typu szczeliny występują w naturalnych kompleksach skalnych, zwłaszcza położonych na dużych głębokościach.

Szczeliny połączone być mogą w ciągi i systemy szczelin. W ciągu szczelin ich osie tworzą linię ciągłą, prostą lub łamaną, natomiast w systemach orientacja poszczególnych szczelin może być różnaita. Czasami w szczelinowej warstwie skalnej orientacja większości szczelin jest określona. Taki ośrodek skalny wykazuje wówczas wyraźne własności anizotropowe. Jak się jednak później przekonamy anizotropia ośrodka nie musi obligatoryjnie wynikać z określonego kierunku przebiegu szczelin.

Z punktu widzenia opisu fenomenologicznego ośrodki szczelinowe wykazują daleko idące podobieństwo do ośrodków porowatych. Losowy na ogół rozkład szczelin w ośrodku szczelinowym podobny jest do losowego rozkładu porów w ośrodku porowatym. Rozkład geometrycznych parametrów szczelin ma podobnie losowy charakter jak rozkład geometrycznych parametrów porów. Dlatego też do opisu własności ośrodków szczelinowych używa się niekiedy parametrów fenomenologicznych zdefiniowanych podobnie jak parametry służące do opisu ośrodków porowatych. Na przykład porowatość szczelinową  $\varphi$  definiuje się jako stosunek objętości szczelin  $V_f$  do całkowitej objętości ośrodka szczelinowego  $V$ :

$$\varphi = \frac{dV_f}{dV} \quad (1)$$

Z drugiej strony, między ośrodkami porowatymi i szczelinowatymi istnieją istotne różnice. Długość szczeliny jest na ogół kilka rzędów wielkości większa od jej miąższości, co nie posiada odpowiednika w przypadku porów. W przeciwieństwie do porów orientacja przestrzenna poszczególnych szczelin jest na ogół dobrze określona. Ponadto w przepływach przez ośrodki szczelinowe zjawiska na granicach faz płyn – matryca odgrywają nieporównanie mniejszą rolę niż w przepływach przez ośrodki porowate.

Należy ponadto zaznaczyć, że literatura dotycząca ośrodków szczelinowych jest nieporównanie skromniejsza od literatury dotyczącej ośrodków porowatych, będących przedmiotem badań już od 150 lat.

## 2. Przepływ w szczelinie o ściankach równoległych

Ze względu na niewielkie miąższości szczelin znajdujących się w skałach górotworu występujące w nich ruchy płynów są na ogół bardzo powolne i tym samym traktować je można jako przepływy pełzające (ang. *creeping flows*). Są to laminarne, stacjonarne lub quasi-stacjonarne ruchy płynów, w których efekty związane z lepkością przeważają zdecydowanie nad efektami bezwładnościowymi. Te ostatnie można więc pominąć jako zaniedbywanie małe.

Stacjonarny przepływ w pojedynczej szczelinie o osi zgodnej z osią  $x$  prostokątnego układu współrzędnych i ściankach równoległych, prostopadłych do osi  $z$  opisany jest rozwiązaniem równania Naviera-Stokesa, które w tym przypadku przyjmuje następującą postać (cf. Lamb, 1932; Berker, 1936, 1963; Kotchin et al., 1955):

$$u(z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (h^2 - z^2) \quad (2)$$

lub

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{P_s - P_e}{l} (h^2 - z^2) \quad (3)$$

gdzie  $u$  jest prędkością płynu,  $\mu$  – lepkością płynu,  $P$  – ciśnieniem płynu,  $P_s$  – ciśnieniem płynu na początku szczeliny,  $P_e$  – ciśnieniem płynu na końcu szczeliny,  $l$  – długością szczeliny,  $2h$  – miąższością szczeliny. Znak ujemny w równaniu (2) pochodzi stąd, że przepływ odbywa się w kierunku spadku, a nie wzrostu ciśnienia w szczelinie.

Natężenie przepływu przez szczelinę wyraża się wzorem:

$$Q = \int_{-h}^h g u(z) dz \quad (4)$$

gdzie  $g$  jest głębokością szczeliny. Podstawienie rozkładu (3) do całki (4) daje:

$$Q = \int_{-h}^h \frac{g}{2\mu} \frac{P_s - P_e}{l} (h^2 - z^2) dz \quad (5)$$

i po wykonaniu całkowania:

$$Q = \frac{2h^3 g}{3\mu} \frac{P_s - P_e}{l} \quad (6)$$

## 2. Przepływy w ciągu szczelin

W przypadku ciągu następujących po sobie cienkich szczelin lub ‘podszczelin’ tworzących jedną ‘wielką szczelinę’ długości, miąższości i głębokości każdej z podszczelin mogą być różne. Natężenie przepływu w każdej z podszczelin tworzących ciąg musi być jednak takie samo, natomiast spadek ciśnienia w każdej z nich może się różnić. Oznaczając długość, miąższość i głębokość  $j$ -tej podszczeliny odpowiednio przez  $l_j$ ,  $2h_j$ ,  $g_j$ , a ciśnienie na końcu i początku  $j$ -tej podszczeliny odpowiednio przez  $P_j$ ,  $P_{j-1}$  możemy napisać:

$$Q = -\frac{2h_j^3 g_j}{3\mu} \frac{P_j - P_{j-1}}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (7)$$

Równanie to, odpowiednie dla  $j$ -tej podszczeliny można zapisać w równoważny sposób:

$$-Q \frac{3\mu l_j}{2h_j^3 g_j} = P_j - P_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (8)$$

Dodając równania (8) kolejno dla wszystkich podszczelin tworzących szczelinę otrzymamy:

$$-Q \frac{3\mu}{2} \sum_{j=1}^J \frac{l_j}{h_j^3 g_j} = P_J - P_0 \quad (9)$$

Jeśli głębokość szczelin jest taka sama wówczas będziemy mieć:

$$-Q \frac{3\mu}{2g} \sum_{j=1}^J \frac{l_j}{h_j^3} = P_J - P_0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (10)$$

Z drugiej strony, dla całego ciągu zachodzi:

$$Q = \frac{2\bar{h}^3 g}{3\mu} \frac{P_0 - P_J}{l} \quad (11)$$

lub

$$Q \frac{3\mu l}{2\bar{h}^3 g} = P_0 - P_J \quad (12)$$

gdzie  $\bar{h}$  jest miąższością zastępczą ciągu. Porównując formuły (10) i (12) otrzymamy następujące wyrażenia na miąższość zastępczą:

$$\frac{l}{\bar{h}^3} = \sum_{j=1}^J \frac{l_j}{h_j^3} \quad (13)$$

lub

$$\bar{h}^3 = \frac{l}{\sum_{j=1}^J l_j / h_j^3} \quad (14)$$

W przypadku, gdy miąższość szczeliny zmienia się w sposób ciągły, równanie (11) na natężenie przepływu zachowuje swoją postać, lecz sumy w formułach (13), (14) należy zastąpić całkami, w wyniku czego otrzymujemy:

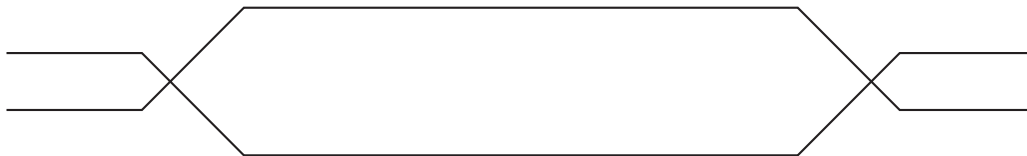
$$\frac{l}{\bar{h}^3} = \int_0^l \frac{dx}{h^3(x)} \quad (15)$$

Natężenie przepływu wyrazi się wówczas wzorem:

$$Q = \frac{2g}{3\mu} \frac{P_s - P_e}{\int_0^l \frac{dx}{h^3(x)}} \quad (16)$$

### 3. Przepływ w obszarze styku szczelin

Obraz przepływu w obszarze styku szczelin zależy od ich geometrycznego kształtu oraz od prędkości przepływu. Ponieważ rozważamy tutaj wyłącznie bardzo powolne przepływy pełzające, efekty hydrodynamiczne związane z bezwładnością płynu, jak oderwanie warstwy granicznej czy tworzenie się wirów, o ile w ogóle wystąpią, będą miały charakter marginalny i nie będą rozważane w niniejszej pracy.



Rys. 1. Uproszczony model szczeliny i styku szczelin

Przyjmując prosty model styku szczelin pokazany na Rys. 1 nietrudno zważyć, że ruch płynu w sąsiedztwie styku ma charakter przepływu dyfuzorowego lub konfuzorowego z kątem rozwarcia  $2\alpha$ . Zagadnienie to było przedmiotem szczegółowych analiz z zastosowaniem rozwiązań równania Naviera-Stokesa (Jeffrey, 1915; Hamel, 1916; Kotchin et al., 1955; Berker, 1963; Rosenhead, 1940; Frankel, 1962, 1963, 1973). Otrzymane rozwiązanie ściśle w biegunowym układzie współrzędnych  $r, \theta$  dla składowej radialnej prędkości przyjmuje następującą postać:

$$|u(r, \theta)| = \frac{1}{r} \left[ -2 \frac{\mu}{\rho} + \wp \left( \frac{i(\theta - \mathcal{G})}{\sqrt{6\mu/\rho}}, \omega, \chi \right) \right] \quad (17)$$

gdzie  $i$  jest jednostką urojoną, a  $\wp(\dots)$  jest dwuokresową funkcją eliptyczną Weierstrassa zmiennej zespolonej. Parametr zespolony  $\mathcal{G}$  oraz dwa parametry rzeczywiste  $\omega$  i  $\chi$  zwane niezmiennikami funkcji Weierstrassa, wyznaczyć należy z zerowych warunków brzegowych na ściankach dyfuzora oraz z warunku renormalizacyjnego:

$$\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} u(r, \theta) d\theta \right| = \frac{Q}{g} \quad (18)$$

gdzie  $g$  jest głębokością szczeliny.

Rozwiązanie powyższe nie odzwierciedla jednak rzeczywistego przepływu na styku szczelin, gdyż w miejscu styku, tj. dla  $r = 0$  prędkość staje się nieskończona.

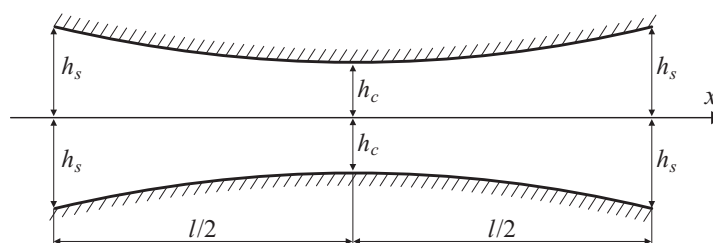
Rozwiązanie przybliżone tego samego zagadnienia dla małych liczb Reynoldsa jest nieco prostsze i nie zawiera funkcji specjalnych

$$|u(r, \theta)| = \frac{|Q|}{r} \frac{\cos(2\theta) - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \quad (19)$$

posiada jednak nadal osobliwość osobliwość dla  $r = 0$  i nie może być tym samym stosowane do opisu przepływu na styku szczelin.

Przyczyną osobliwości w podanych wyżej rozwiązaniach jest to, że na styku szczelin miąższość szczeliny spada do zera, przez co dla zachowania niezmiennego natężenia przepływu prędkość zmierza do nieskończoności.

Zamiast takiej sytuacji założyć możemy, że w punkcie styku przejście z jednej szczeliny do drugiej jest 'łagodne', a miąższość nie spada do zera, lecz do skończonej wartości  $h_c$ . Kształt ścianek możemy wówczas aproksymować przy pomocy dwóch gałęzi hiperboli, jak to pokazano na Rys. 2.



Rys. 2. Okolice styku szczelin opisane przez dwie gałęzie hiperboli

Wspomniana tutaj hiperbola opisana jest równaniem

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{(x - l/2)^2}{a^2} = 1 \quad (20)$$

a jej gałęzie wyrazić można jako funkcje:

$$h(x) = z(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2} \quad (21)$$

Półosi hiperboli  $a$  i  $b$  wyznaczyć można z warunków:

$$z(x)|_{x=0} = h_s \quad (22)$$

$$z(x)|_{x=l/2} = h_c \quad (23)$$

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń warunki te dają:

$$b = h_c \quad (24)$$

$$a = \frac{l}{2} \frac{h_c}{\sqrt{h_s^2 - h_c^2}} \quad (25)$$

Podstawienie wyrażenia (21) do wzoru (16) daje:

$$Q = \frac{2g}{3\mu} (P_s - P_e) \left[ \int_0^l \frac{dx}{\left\{ \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + (x - l/2)^2} \right\}^3} \right]^{-1} \quad (26)$$

W wyniku całkowania będziemy mieć:

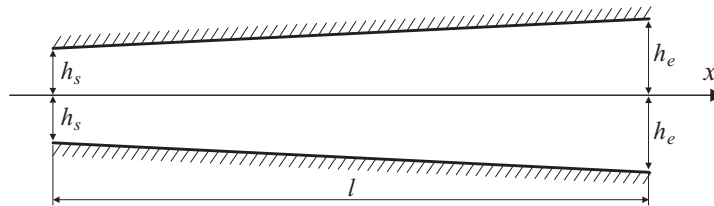
$$Q = \frac{2g}{3\mu} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{P_s - P_e}{l} \quad (27)$$

Po podstawieniu formuł (24), (25) na półosie hiperboli otrzymamy ostatecznie:

$$Q = \frac{2g}{3\mu} h_s h_c^2 \frac{P_s - P_e}{l} \quad (28)$$

Porównując równania (28) i (11) widzimy, że dla przewężenia hiperbolicznego miąższość zastępcza wyraża się wyjątkowo prostą formułą:

$$\bar{h}^3 = h_s h_c^2 \quad (29)$$



Rys. 3. Nieznacznie nachylone płaskie ścianki w pobliżu miejsca styku szczeliny

Odcinek między przewężeniem hiperbolicznym a pełnym obszarem miąższości szczeliny przedstawić można jako przepływ między dwoma nieznacznie nachylonymi płaskimi ściankami, przy czym przejście z obszaru hiperbolicznego następuje w punkcie styczności płaskiej ścianki do hiperboli. Nachylone ścianki pokazane na Rys. 3 mogą być opisane równaniem linii prostej:

$$\pm h(x) = h_s + \frac{h_e - h_s}{l} x \quad (30)$$

Podstawiając wyrażenie (30) do wzoru (16) na natężenie przepływu będziemy mieć:

$$Q = \frac{2g}{3\mu} (P_s - P_e) \left[ \int_0^l \frac{dx}{\left( h_s + \frac{h_e - h_s}{l} x \right)^3} \right]^{-1} \quad (31)$$

Wykonanie całkowania daje:

$$Q = \frac{2g}{3\mu} \frac{h_e^2 h_s^2}{h_e + h_s} \frac{P_s - P_e}{l} \quad (32)$$

Otrzymujemy stąd następujący wzór na miąższość zastępczą w obszarze nachylonych ścianek:

$$\bar{h}^3 = \frac{2h_e^2 h_s^2}{h_e + h_s} \quad (33)$$

W ten sposób szczelina przedstawiona została jako składająca się z trzech zasadniczych elementów: elementu głównego o ściankach równoległych obejmującego niemal całą długość szczeliny, hiperbolicznego obszaru styku oraz obszaru przejściowego między obszarem zasadniczym a obszarem styku (Rys. 4). Oczywiście, na podstawie miąższości zastępczych wspomnianych elementów istnieje możliwość wyznaczenia miąższości zastępczej odniesionej do całej szczeliny. Sposób jej wyznaczania nie różni się od przedstawionych powyżej procedur.



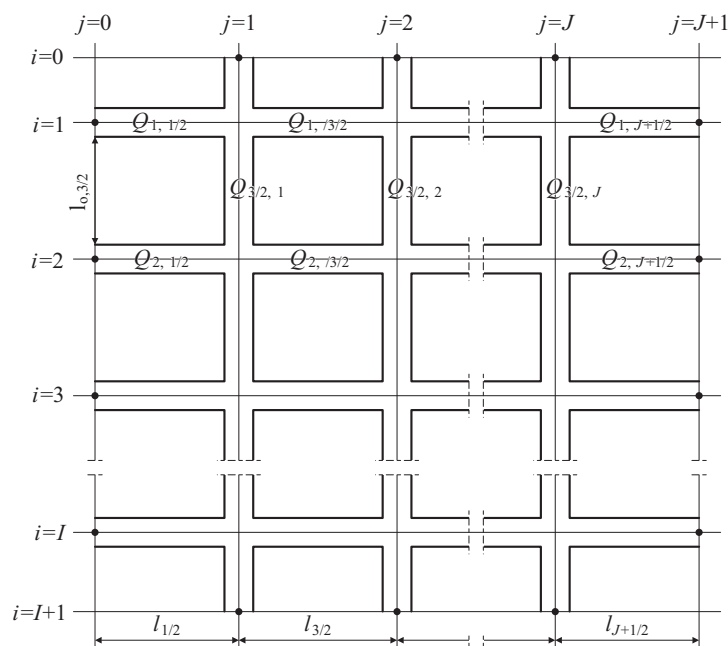
Rys. 4. Model szczeliny jako sekwencji składającej się z trzech zasadniczych elementów: elementu zasadniczego obejmującego niemal całą długość szczeliny, hiperbolicznego obszaru styku z szczeliną sąsiednią oraz obszaru przejściowego między obszarem zasadniczym a hiperbolicznym obszarem styku

Jeśli znane są wartości ciśnienia  $P_0, P_J$  na obydwu końcach megaszczeliny, wówczas wartości ciśnień w punktach węzłowych, tj. w miejscach styku podszelein  $P_j$  oraz natężenie przepływu  $Q$  mogą być wyznaczone z układu równań (7) lub (8). Układ ten złożony z  $J$  równań zawiera  $J - 1$  niewiadomych wartości ciśnienia  $P_j$  oraz niewiadomą wartość wydatku przepływu  $Q$ .

To samo zagadnienie rozwiązać można jednak w znacznie prostszy sposób. Po określeniu miąższości zastępczej całego systemu  $\bar{h}$  natężenie przepływu  $Q$  wyznaczyć można bezpośrednio ze wzoru (11). Następnie korzystając ze wzoru (8) wyznacza się wartości ciśnień w punktach węzłowych  $P_j$ , kolejno dla  $j = 1, j = 2, j = 3$ , etc.

#### 4. Przepływ w ortogonalnym układzie szczelin

Rozważania przedstawione w poprzednich rozdziałach mogą być uogólnione na ortogonalny układ szczelin. Układ taki pokazany jest na Rys. 4. W celu uniknięcia zamieszania miejsca styku szczelin oznaczymy całkowitymi wartościami pary wskaźników  $\{i, j\}$  siatki ortogonalnej, natomiast poszczególnym podszeleinom odpowiadać będą wskaźniki półowkowe, np.  $(i - 1/2, j), (i, j + 1/2)$ .



Rys. 5. Ortogonalny układ szczelin

W przeciwieństwie do megaszczeliny utworzonej przez ciąg podszzelin, w przypadku siatki ortogonalnej uśredniony kierunek przepływu nie jest znany a priori, a natężenia przepływu w poszczególnych podszzelinach mogą być różne.

Zgodnie z formuła (7) natężenia przepływu w podszzelinach tworzących węzeł  $(i,j)$  będą:

$$Q_{i,j-1/2} = -\frac{2h_{i,j-1/2}^3 g_{i,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{l_{i,j-1/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, J+1 \quad (34)$$

$$Q_{i,j+1/2} = -\frac{2h_{i,j+1/2}^3 g_{i,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j+1}}{l_{i,j+1/2}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (35)$$

$$Q_{i-1/2,j} = -\frac{2h_{i-1/2,j}^3 g_{i-1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{l_{i-1/2,j}}, \quad i = 1, 2, \dots, I+1 \quad (36)$$

$$Q_{i+1/2,j} = -\frac{2h_{i+1/2,j}^3 g_{i+1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j}}{l_{i+1/2,j}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I \quad (37)$$

Dla szczelin dochodzących do węzłów położonych na brzegu rozważanego obszaru przepływu określić można warunki brzegowe. Dla brzegów przepuszczalnych są zwykle to warunki niejednorodne pierwszego rodzaju, natomiast dla brzegów nieprzepuszczalnych – warunki jednorodne pierwszego rodzaju.

Jeśli lewy brzeg obszaru pokazanego na Rys. 4 jest przepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że wartość ciśnienia jest tam określona i wynosi ono  $P_L$ :

$$P_{i,0} = P_L, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (38)$$

Jeśli natomiast brzeg ten jest nieprzepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że:

$$P_{i,0} = P_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (39)$$

Jeśli prawy brzeg obszaru pokazanego na Rys. 4 jest przepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że wartość ciśnienia jest tam określona i wynosi ono  $P_R$ :

$$P_{i,J+1} = P_R, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (40)$$

Jeśli natomiast brzeg ten jest nieprzepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że:

$$P_{i,J+1} = P_{i,J}, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (41)$$

Jeśli górny brzeg obszaru pokazanego na Rys. 4 jest przepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że wartość ciśnienia jest tam określona i wynosi ono  $P_T$ :

$$P_{0,j} = P_T, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (42)$$

Jeśli natomiast brzeg ten jest nieprzepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że:

$$P_{0,j} = P_{1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (43)$$

Jeśli dolny brzeg obszaru pokazanego na Rys. 4 jest przepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że wartość ciśnienia jest tam określona i wynosi ono  $P_B$ :

$$P_{I+1,j} = P_B, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (44)$$

Jeśli natomiast brzeg ten jest nieprzepuszczalny, wówczas możemy przyjąć, że:

$$P_{I+1,j} = P_{I,j}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (45)$$



Zgodnie z zasadą zachowania masy suma natężeń przepływu w szczelinach otaczających dowolny węzeł  $\{i,j\}$  w obszarze przepływu musi być równa zeru, tj.:

$$(\sum Q)_{i,j} = Q_{i,j-1/2} + Q_{i,j+1/2} + Q_{i-1/2,j} + Q_{i+1/2,j} = 0 \quad (46)$$

Podstawienie wyrażen (34) – (37) do równania (46) daje:

$$\begin{aligned} (\sum Q)_{i,j} = & \frac{2h_{i,j-1/2}^3 g_{i,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{l_{i,j-1/2}} + \frac{2h_{i,j+1/2}^3 g_{i,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j+1}}{l_{i,j+1/2}} \\ & + \frac{2h_{i-1/2,j}^3 g_{i-1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{l_{i-1/2,j}} + \frac{2h_{i+1/2,j}^3 g_{i+1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j}}{l_{i+1/2,j}} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Równanie powyższe odnoszące się do wszystkich węzłów może być zapisane w sposób:

$$\{B_{i,j}P_{i-1,j} + C_{i,j}P_{i,j-1} + D_{i,j}P_{i,j} + E_{i,j}P_{i,j+1} + F_{i,j}P_{i+1,j} = R_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J} \quad (48)$$

przy czym współczynniki  $B_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$ ,  $E_{i,j}$ ,  $F_{i,j}$  określone są w dla sposób:

$$B_{i,j} = \begin{cases} -\frac{2}{3\mu} \frac{h_{i-1/2,j}^3 g_{i-1/2,j}}{l_{i-1/2,j}} & \text{dla } i \geq 2 \\ 0 & \text{dla } i = 1 \end{cases} \quad (49)$$

$$C_{i,j} = \begin{cases} -\frac{2}{3\mu} \frac{h_{i,j-1/2}^3 g_{i,j-1/2}}{l_{i,j-1/2}} & \text{dla } j \geq 2 \\ 0 & \text{dla } j = 1 \end{cases} \quad (50)$$

$$E_{i,j} = \begin{cases} -\frac{2}{3\mu} \frac{h_{i,j+1/2}^3 g_{i,j+1/2}}{l_{i,j+1/2}} & \text{dla } j \leq J-1 \\ 0 & \text{dla } j = J \end{cases} \quad (51)$$

$$F_{i,j} = \begin{cases} -\frac{2}{3\mu} \frac{h_{i+1/2,j}^3 g_{i+1/2,j}}{l_{i+1/2,j}} & \text{dla } i \leq I-1 \\ 0 & \text{dla } i = I \end{cases} \quad (52)$$

Natomiast postacie współczynnika  $D_{i,j}$  oraz wyrazu wolnego  $R_{i,j}$  zależą od warunków brzegowych. Dla wszystkich węzłów  $(i,j)$  z wyjątkiem tych, które położone są w pobliżu brzegu obszaru mamy:

$$\begin{aligned} D_{i,j} = & \frac{2}{3\mu} \left( \frac{h_{i-1/2,j}^3 g_{i-1/2,j}}{l_{i-1/2,j}} + \frac{h_{i+1/2,j}^3 g_{i+1/2,j}}{l_{i+1/2,j}} \right. \\ & \left. + \frac{h_{i,j-1/2}^3 g_{i,j-1/2}}{l_{i,j-1/2}} + \frac{h_{i,j+1/2}^3 g_{i,j+1/2}}{l_{i,j+1/2}} \right) \text{ dla } \begin{cases} i \leq I-1 \\ j \leq J-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

$$R_{i,j} = 0 \text{ dla } \begin{cases} i \leq I-1 \\ j \leq J-1 \end{cases} \quad (54)$$

Jeśli na lewym brzegu ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 określona jest wielkość ciśnienia, tj. ma zastosowanie pierwszy warunek brzegowy (38), wówczas:

$$R_{i,1} = \frac{2}{3\mu} \frac{2h_{i,1/2}^3 g_{i,1/2}}{l_{i,1/2}} P_L, \quad 1 \leq i \leq I \quad (55)$$

a współczynniki  $D_{i,1}$  dane są wzorem (53) dla  $j = 1$ . Natomiast jeśli ten sam brzeg ośrodka jest nieprzepuszczalny, tj. ma zastosowanie drugi warunek brzegowy (39), wówczas:

$$R_{i,1} = 0, \quad 1 \leq i \leq I \quad (56)$$

$$D_{i,1} = \frac{2}{3\mu} \left( \frac{h_{i-1/2,1}^3 g_{i-1/2,j}}{l_{i-1/2,1}} + \frac{h_{i+1/2,1}^3 g_{i+1/2,1}}{l_{i+1/2,1}} + \frac{h_{i,3/2}^3 g_{i,3/2}}{l_{i,3/2}} \right), \quad 1 \leq i \leq I \quad (57)$$

Jeśli na prawym brzegu ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 określona jest wielkość ciśnienia, tj. ma zastosowanie pierwszy warunek brzegowy (40), wówczas:

$$R_{i,J} = \frac{2}{3\mu} \frac{2h_{i,J+1/2}^3 g_{i,J+1/2}}{l_{i,J+1/2}} P_R, \quad 1 \leq i \leq I \quad (58)$$

a współczynniki  $D_{i,J}$  dane są wzorem (53) dla  $j = J$ . Natomiast jeśli ten sam brzeg ośrodka jest nieprzepuszczalny, tj. ma zastosowanie drugi warunek brzegowy (41), wówczas:

$$R_{i,J} = 0, \quad 1 \leq i \leq I \quad (59)$$

$$D_{i,1} = \frac{2}{3\mu} \left( \frac{h_{i-1/2,J}^3 g_{i-1/2,J}}{l_{i-1/2,J}} + \frac{h_{i+1/2,J}^3 g_{i+1/2,J}}{l_{i+1/2,J}} + \frac{h_{i,J-1/2}^3 g_{i,J-1/2}}{l_{i,J-1/2}} \right), \quad 1 \leq i \leq I \quad (60)$$

Jeśli na górnym brzegu ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 określona jest wielkość ciśnienia, tj. ma zastosowanie pierwszy warunek brzegowy (42), wówczas:

$$R_{1,j} = \frac{2}{3\mu} \frac{2h_{1/2,j}^3 g_{1/2,j}}{l_{1/2,j}} P_T, \quad 1 \leq j \leq J \quad (61)$$

a współczynniki  $D_{1,j}$  dane są wzorem (53) dla  $i = 1$ . Natomiast jeśli ten sam brzeg ośrodka jest nieprzepuszczalny, tj. ma zastosowanie drugi warunek brzegowy (43), wówczas:

$$R_{1,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J \quad (62)$$

$$D_{1,j} = \frac{2}{3\mu} \left( \frac{h_{3/2,j}^3 g_{3/2,j}}{l_{3/2,j}} + \frac{h_{1,j-1/2}^3 g_{1,j-1/2}}{l_{1,j-1/2}} + \frac{h_{1,j+1/2}^3 g_{1,j+1/2}}{l_{1,j+1/2}} \right), \quad 1 \leq j \leq J \quad (63)$$

Jeśli na dolnym brzegu ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 określona jest wielkość ciśnienia, tj. ma zastosowanie pierwszy warunek brzegowy (44), wówczas:

$$R_{I,j} = \frac{2}{3\mu} \frac{2h_{I+1/2,j}^3 g_{I+1/2,j}}{l_{I+1/2,j}} P_B, \quad 1 \leq j \leq J \quad (64)$$

a współczynniki  $D_{I,j}$  dane są wzorem (53) dla  $i = I$ . Natomiast jeśli ten sam brzeg ośrodka jest nieprzepuszczalny, tj. ma zastosowanie drugi warunek brzegowy (45), wówczas:

$$R_{I,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J \quad (65)$$

$$D_{I,j} = \frac{2}{3\mu} \left( \frac{h_{I-1/2,j}^3 g_{I-1/2,j}}{l_{I-1/2,j}} + \frac{h_{I,j-1/2}^3 g_{I,j-1/2}}{l_{I,j-1/2}} + \frac{h_{I,j+1/2}^3 g_{I,j+1/2}}{l_{I,j+1/2}} \right), \quad 1 \leq j \leq J \quad (66)$$

Układ równań (48) zapisać można w następującej postaci macierzowej:

$$\mathbf{V} \mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (67)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest wektorem poszukiwanych wartości ciśnienia w poszczególnych węzłach ortogonalnej siatki szczelin

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ \vdots \\ P_{1,J} \\ P_{2,1} \\ P_{2,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{I,J} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$\mathbf{R}$  jest wektorem wyrazów wolnych

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{1,2} \\ \vdots \\ R_{1,J} \\ R_{2,1} \\ R_{2,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{I,J} \end{bmatrix} \quad (69)$$

a  $\mathbf{V}$  jest pentadiagonalną macierzą współczynników. Równanie macierzowe (67) rozwiązać można metodami algebry liniowej. Ze względu na duże na ogół wymiary pentadiagonalnej macierzy współczynników efektywne obliczenia przeprowadzić można dysponując odpowiednią mocą i pamięcią komputerów.

Znając wartości ciśnień we wszystkich węzłach ortogonalnej siatki szczelin wyznaczenie natężeń przepływu w poszczególnych szczelinach przeprowadzić można bezpośrednio korzystając ze wzorów (34) – (37).

Ogólny wydatek przepływu w kierunku pionowym dla ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 obliczyć można łatwo jako sumę wydatków przepływu przez szczeliny pionowym, tj.:

$$(Q_V)_{i+1/2} = \sum_{j=1}^J Q_{i+1/2,j} \quad \text{dla dowolnego lecz ustalonego } i \in \{0,1,2,\dots,I\} \quad (70)$$

Ogólny wydatek przepływu w kierunku poziomym dla ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 obliczyć można łatwo jako sumę wydatków przepływu przez szczeliny poziome, tj.:

$$(Q_H)_{j+1/2} = \sum_{i=1}^I Q_{i,j+1/2} \quad \text{dla dowolnego lecz ustalonego } j \in \{0,1,2,\dots,J\} \quad (71)$$

## 5. Anizotropia ośrodka szczelinowego i kanały preferencyjne

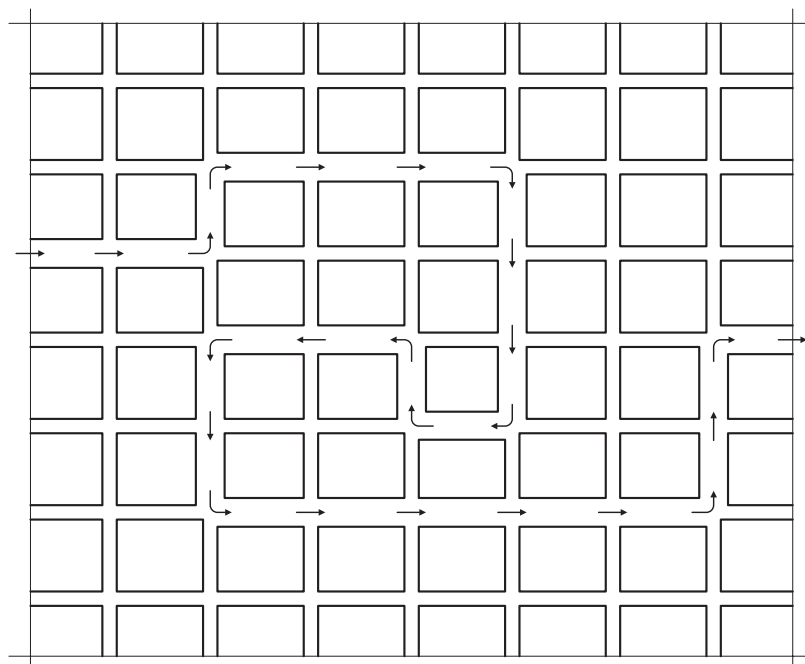
Jeśli na prawym i lewym brzegu ośrodka szczelinowego pokazanego na Rys. 5 określona jest wielkość ciśnienia, górny i dolny brzeg tego ośrodka są nieprzepuszczalne, a szczeliny poziome mają stałą miąższość (niekoniecznie taką samą dla wszystkich szczelin), wówczas przepływ w ośrodku ma charakter przepływu poziomego, a szczeliny pionowe pozostają hydrodynamicznie nieaktywne, tj. przepływ w nich jest nieobecny.

Jeśli natomiast miąższość lub głębokość poszczególnych podszczelin, których ciąg tworzy megaszczelinę poziomą jest różny dla poszczególnych podszczelin, wówczas w podszczelinach pionowych pojawić się może niezerowy przepływ pionowy. W ten sposób hydrodynamicznie aktywne stają się zarówno szczeliny poziome jak natomiast pionowe. Podobny rezultat uzyskuje się, jeśli wartości ciśnień na lewym i prawym brzegu ośrodka nie są stałe, lecz zmieniają się w kierunku pionowym, tj. ze zmianą indeksu  $i$ .

Podobnie, jeśli na górnym i dolnym brzegu tego samego ośrodka szczelinowego określona jest wielkość ciśnień, lewy i prawy brzeg tego ośrodka są nieprzepuszczalne, a szczeliny pionowe mają stałą miąższość (niekoniecznie taką samą dla wszystkich szczelin), wówczas przepływ w ośrodku ma charakter przepływu pionowego, a szczeliny poziome pozostają hydrodynamicznie nieaktywne, tj. przepływ w nich jest nieobecny.

Jeśli natomiast miąższość lub głębokość poszczególnych podszczelin, których ciąg tworzy megaszczelinę pionową jest różny dla poszczególnych podszczelin, wówczas w podszczelinach poziomych pojawić się może niezerowy przepływ poziomy. W ten sposób hydrodynamicznie aktywne stają się zarówno szczeliny pionowe jak natomiast poziome. Podobny rezultat uzyskuje się, jeśli wartości ciśnień na górnym i dolnym brzegu ośrodka nie są stałe, lecz zmieniają się w kierunku poziomym, tj. ze zmianą indeksu  $j$ .

Większe różnice w parametrach geometrycznych poszczególnych podszczelin prowadzić mogą do tworzenia się tzw. *kanałów preferencyjnych*. Zgodnie z definicją podaną przez autora niniejszej pracy w odrębnej publikacji (2009) kanałem preferencyjnym w ośrodku szczelinowym nazywać będziemy ciąg połączonych ze sobą sekwencyjnie podszczelin pionowych i poziomych (ewentualnie tylko pionowych lub tylko poziomych), przepływ przez który napotyka na najmniejszy opór hydrodynamiczny podczas transportu płynu między przeciwnymi brzegami ośrodka. Przykład kanału preferencyjnego w ośrodku szczelinowym pokazany jest na Rys. 6.



Rys. 6. Przykład kanału preferencyjnego w ortogonalnym układzie szczelin

Ponieważ natężenie przepływu laminarnego w szczelinie jest proporcjonalne do trzeciej potęgi jej miąższości, zatem różnice miąższości poszczególnych podszczelin wpływają najbardziej znacząco na powstawanie kanałów preferencyjnych.

Nietrudno zauważyć, że istnienie kanału preferencyjnego pokazanego na Rys. 6 implikuje anizotropię ośrodka szczelinowego. Mimo, iż różnica ciśnień zadana jest jedynie między prawym a lewym brzegiem ośrodka, widzimy, że na skutek istnienia kanału preferencyjnego w końcowym rezultacie oprócz przepływu poziomego pojawia się niezerowa składowa pionowa prędkości, gdy bierzemy pod uwagę ośrodek szczelinowy jako całość, co charakterystyczne jest dla podejścia fenomenologicznego. Powstawanie składowej

pionowej prędkości związane jest jedynie z topologią kanału preferencyjnego i niezależne jest od orientacji szczelin w przestrzeni. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że niejednorodność geometrycznych własności podszczelin wchodzących w skład układu szczelinowego implikować może istnienie anizotropii tego układu niezależnie od przestrzennej orientacji podszczelin.

Należy zaznaczyć, że kanały preferencyjne w ośrodku szczelinowym nie są bytem stałym i niezmiennym. W przypadku zmian wartości ciśnień na brzegach ośrodka szczelinowego lub zmian warunków brzegowych powstać mogą nowe kanały preferencyjne, a kanały dotychczasowe osłabić mogą swoją skuteczność, lub nawet stać się nieaktywne.

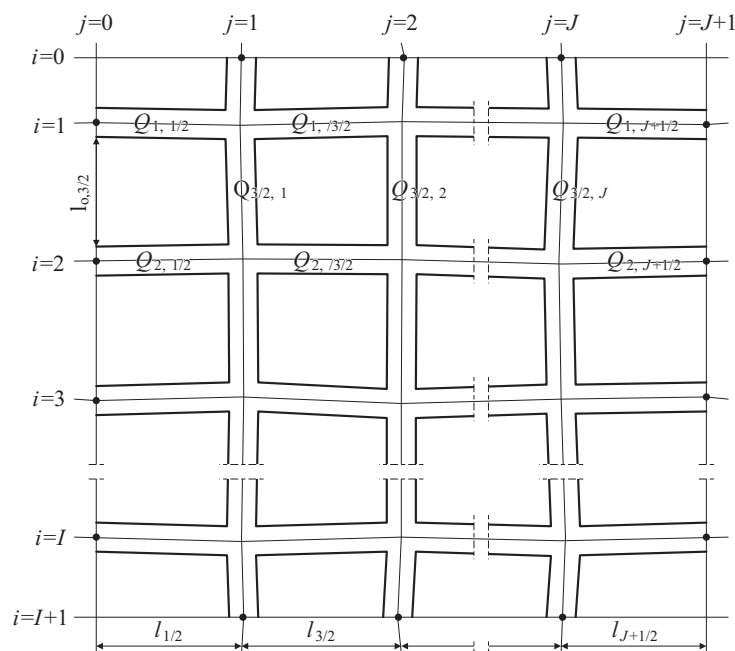
## 6. Psudo-ortogonalny układ szczelin

Rozważania przedstawione w poprzednim rozdziale odnosiły się do szczelin pionowych i poziomych tworzących układ ortogonalny. Jednakże nieznaczne naruszenie ortogonalności układów szczelin nie powoduje nieadekwatności, ani nawet poważniejszych komplikacji w rozważaniach przedstawionych uprzednio. Równoległe do siebie dotychczas podszczeliny mogą różnić się długością, a także niekoniecznie być do siebie równoległe.

W ten sposób dochodzimy do pojęcia pseudo-ortogonalnej siatki szczelin. Jej przykład pokazany jest na Rys. 7.

*Pseudo-ortogonalny układ szczelin* nie może być oczywiście tworzony w sposób dowolny. Jest to układ otrzymany z układu ortogonalnego dzięki zastosowaniu transformacji homeomorficznej. W ten sposób topologiczne własności układu nie zostają zmienione poprzez proces transformacji.

Rys. 7 pokazuje pseudo-ortogonalną siatkę szczelin utworzoną przez ciągi podszczelin pseudopionowych oraz pseudopoziomych o rozmaitych długościach i miąższościach. Pomimo tego, dzięki transformacji homeomorficznej sposób indeksacji zarówno węzłów siatki jak i poszczególnych podszczelin pozostaje niezmienny.



Rys. 7. Przykład pseudo-ortogonalnego układu szczelin

Wszystkie rozważania przedstawione w dwóch poprzednich rozdziałach odnoszące się do układów ortogonalnych zachowują zatem swoją ważność w odniesieniu do pseudo-ortogonalnego układu szczelin. Jest to możliwe dzięki homeomorficzności transformacji układów.

Pomimo, iż na Rys. 5, 6 i 7 pokazane są jedynie szczeliny o ściankach równoległych, wszystkie przedstawione powyżej rozważania odnoszą się również do szczelin o ściankach nierównoległych. W tym ostat-

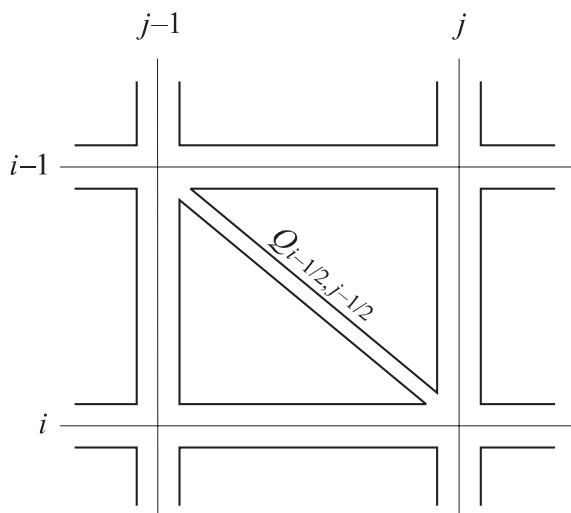
nim przypadku miąższość szczelin  $h$  zastąpić należy ich miąższością zastępczą  $\bar{h}$ . Warunkiem zasadniczym rozszerzenia przedstawionych rozważań na szczeliny o ściankach nierównoległych jest spełnianie warunku smukłości szczelin, zgodnie z którym miąższość każdej ze szczelin jest kilka rzędów wielkości mniejsza od jej pozostałych wymiarów geometrycznych, tj. długości i głębokości.

W ten sposób rozważania dotyczące ortogonalnych układów szczelin zostały bez większych modyfikacji rozszerzone na układy pseudo-ortogonalne oraz układy szczelin smukłych o nierównoległych ściankach.

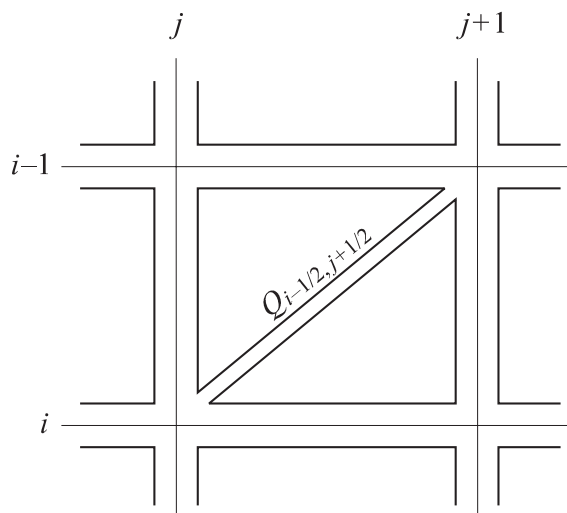
## 7. Quasi-nieregularny układ szczelin

Układy pseudo-ortogonalne nie są jednak w stanie objąć szerokiej klasy systemów szczelin spotykanych w górotworze. W celu rozwiązania tego problemu konieczne jest dokonanie rozszerzenia dotychczasowych rozważań na znacznie obszerniejsze klasy układów szczelin.

Rozszerzenie takie może być uzyskane poprzez wprowadzenie układu, na który oprócz szczelin pionowych (lub alternatywnie pseudopionowych) i poziomych (lub alternatywnie pseudopoziomych) składają się szczeliny diagonalne i antydiagonalne. Te ostatnie rodzaje szczelin łączą bezpośrednio węzły siatki przesunięte wzajemnie o jednostkową wartość wskaźnika indeksowania w sąsiednich szczelinach. Szczeliny takie pokazane są na Rys. 8 i 9.



Rys. 8. Przykład układu zawierającego szczelinę diagonalną



Rys. 9. Przykład układu zawierającego szczelinę antydiagonalną

Układ szczelin, składający się ze szczelin pseudopionowych, pseudopoziomych, diagonalnych i antydiagonalnych nazywać będziemy *quasi-nieregularnym układem szczelin*. Jak zobaczymy, układ ten obejmuje bardzo szeroką klasę rzeczywistych szczelin występujących w górotworze.

W celu opisu przepływu płynu przez quasi-nieregularny układ szczelin autor niniejszej pracy proponuje wprowadzenie tzw. *parametrów istnienia*. Są to binarne parametry odnoszące się zarówno do węzłów jak i do podszczelin i przyjmujące jedynie dwie wartości: 0 lub 1.

Węzłowy parametr istnienia  $\aleph_{i,j}^N$  odnoszący się do węzła  $(i, j)$  siatki równy jest jedności, jeśli węzeł ten łączy co najmniej dwie podszczeliny o niezerowych przekrojach poprzecznych i przepuszczalnościach, a ponadto dwa markery (tj. oznaczone cząstki płynu) odchodzące z tego węzła w kierunku różnych podszczelin stykających się w węźle osiągnąć mogą dwa przeciwstawne brzegi ośrodka szczelinowego bez stykania lub krzyżowania się trajektorii markerów. W przeciwnym przypadku węzłowy parametr istnienia  $\aleph_{i,j}^N$  odnoszący się do węzła  $(i, j)$  siatki równy jest zeru.

Węzłowy parametr istnienia przypisać można również węzłom znajdującym się na brzegu ośrodka szczelinowego. Jeśli brzeg ten jest w danym punkcie przepuszczalny, wówczas odpowiadający mu leżący na brzegu punkt węzłowy ma przypisaną wartość parametru istnienia równą jedności. Jeśli natomiast brzeg

ten jest w danym punkcie nieprzepuszczalny, wówczas odpowiadający mu leżący na brzegu punkt węzłowy ma przypisaną wartość parametru istnienia równą zeru.

*Pionowy parametr istnienia*  $\aleph_{i+1/2,j}^V$  odnoszący się do pseudopionowej podszczeliny  $(i+1/2,j)$  równy jest jedności, jeśli podszczelina ta posiada niezerowe przekrój poprzeczny i przepuszczalność, a ponadto łączy ona dwa sąsiednie węzły o niezerowych wartościach parametru istnienia  $\aleph_{i,j}^N, \aleph_{i+1,j}^N$ . W przeciwnym przypadku pionowy parametr istnienia  $\aleph_{i+1/2,j}^V$  odnoszący się do tej podszczeliny równy jest zeru.

*Poziomy parametr istnienia*  $\aleph_{i,j+1/2}^H$  odnoszący się do pseudopoziomej podszczeliny  $(i,j+1/2)$  równy jest jedności, jeśli podszczelina ta posiada niezerowe przekrój poprzeczny i przepuszczalność, a ponadto łączy ona dwa sąsiednie węzły o niezerowych wartościach parametru istnienia  $\aleph_{i,j}^N, \aleph_{i,j+1}^N$ . W przeciwnym przypadku poziomy parametr istnienia  $\aleph_{i,j+1/2}^H$  odnoszący się do tej podszczeliny równy jest zeru.

*Diagonalny parametr istnienia*  $\aleph_{i+1/2,j+1/2}^D$  odnoszący się do diagonalnej podszczeliny  $(i+1/2,j+1/2)$  równy jest jedności, jeśli podszczelina ta posiada niezerowe przekrój poprzeczny i przepuszczalność, a ponadto łączy ona dwa przesunięte o jednostkową wartość wskaźnika należące do sąsiednich pseudorównoległych szczelin węzły o niezerowych wartościach parametru istnienia  $\aleph_{i,j}^N, \aleph_{i+1,j+1}^N$ . W przeciwnym przypadku diagonalny parametr istnienia  $\aleph_{i+1/2,j+1/2}^D$  odnoszący się do tej podszczeliny równy jest zeru.

*Antydiagonalny parametr istnienia*  $\aleph_{i+1/2,j+1/2}^A$  odnoszący się do antydiagonalnej podszczeliny  $(i+1/2,j+1/2)$  równy jest jedności, jeśli podszczelina ta posiada niezerowe przekrój poprzeczny i przepuszczalność, a ponadto łączy ona dwa przesunięte o jednostkową wartość wskaźnika należące do sąsiednich pseudorównoległych szczelin węzły o niezerowych wartościach parametru istnienia  $\aleph_{i+1,j+1}^N, \aleph_{i,j}^N$ . W przeciwnym przypadku antydiagonalny parametr istnienia  $\aleph_{i+1/2,j+1/2}^A$  odnoszący się do tej podszczeliny równy jest zeru.

Należy zaznaczyć, że równoczesne istnienie szczeliny diagonalnej i antydiagonalnej dla jakiegokolwiek pary  $(i+1/2,j+1/2)$  jest przez przyjęty model zakazane, tj.:

$$\forall_{i \in \{0,1,2,\dots,I\}} \forall_{j \in \{0,1,2,\dots,J\}} \{ \aleph_{i+1/2,j+1/2}^D \aleph_{i+1/2,j+1/2}^A = 0 \} \quad (72)$$

Natomiast równoczesne nieistnienie szczeliny diagonalnej i antydiagonalnej dla dowolnej pary  $(i+1/2,j+1/2)$  jest dopuszczalne.

Ograniczenie (72) zakazujące współistnienia w modelu szczeliny diagonalnej i antydiagonalnej może być łatwo ominięte poprzez zmianę sposobu indeksacji węzłów. Wystarczy w miejscu przecięcia szczeliny diagonalnej i antydiagonalnej umieścić nowy punkt węzłowy, a szczeliny pionowe i poziome obejmujące blok matrycy zawierający podszczelinę diagonalną i antydiagonalną traktować jako złożone z dwóch podszczelin, między którymi znajduje się węzeł układu. Tak zmodyfikowany system indeksowania nie będzie zawierał już równocześnie podszczeliny diagonalnej i antydiagonalnej w jednym bloku. Odbędzie się to kosztem zwiększenia ilości węzłów w sieci szczelin. Nowo utworzonym węzłom przypisany będzie parametr istnienia równy jedności.

Dzięki tego typu operacjom układ quasi-nieregularny obejmuje bardzo szeroką klasę topologicznych układów szczelin.

Nietrudno zauważyć, że w przypadku nieistnienia wszystkich szczelin diagonalnych i antydiagonalnych quasi-nieregularny układ szczelin przechodzi w układ pseudo-ortogonalny.

Wzory na wydatek przepływu w szczelinach pionowych i poziomych (34) – (37) pozostają bez zmiany, natomiast natężenie przepływu w szczelinach diagonalnych wyrazi się wzorami:

$$Q_{i-1/2,j-1/2} = \aleph_{i-1/2,j-1/2}^D \frac{2h_{i-1/2,j-1/2}^3 g_{i-1/2,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j-1}}{l_{i-1/2,j-1/2}}, \quad \begin{cases} i = 1,2,\dots,I+1 \\ j = 1,2,\dots,J+1 \end{cases} \quad (73)$$

$$Q_{i+1/2,j+1/2} = \aleph_{i+1/2,j+1/2}^D \frac{2h_{i+1/2,j+1/2}^3 g_{i+1/2,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j+1}}{l_{i-1/2,j-1/2}}, \quad \begin{cases} i = 0,1,2,\dots,I \\ j = 0,1,2,\dots,J \end{cases} \quad (74)$$

a natężenie przepływu w szczelinach antydiagonalnych wyrazi się wzorami:

$$Q_{i-1/2,j+1/2} = \aleph_{i-1/2,j+1/2}^A \frac{2h_{i-1/2,j+1/2}^3 g_{i-1/2,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j+1}}{l_{i-1/2,j+1/2}}, \quad \begin{cases} i = 1,2,\dots,I+1 \\ j = 0,1,2,\dots,J \end{cases} \quad (75)$$

$$Q_{i+1/2,j-1/2} = \aleph_{i+1/2,j-1/2}^A \frac{2h_{i+1/2,j-1/2}^3 g_{i+1/2,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j-1}}{l_{i+1/2,j-1/2}}, \quad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \dots, I \\ j = 1, 2, \dots, J + 1 \end{cases} \quad (76)$$

Zasada zachowania masy wymaga, aby suma dopływów i odpływów płynu do każdego węzła siatki była równa zero, tj.:

$$\begin{aligned} (\sum \mathcal{Q})_{i,j} = Q_{i,j-1/2} + Q_{i,j+1/2} + Q_{i-1/2,j} + Q_{i+1/2,j} + Q_{i-1/2,j-1/2} + Q_{i-1/2,j+1/2} \\ + Q_{i+1/2,j-1/2} + Q_{i+1/2,j+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

Podstawienie wyrażeń (34) – (37) i (73) – (76) do równania (77) daje:

$$\begin{aligned} (\sum \mathcal{Q})_{i,j} = \aleph_{i-1/2,j}^H \frac{2h_{i,j-1/2}^3 g_{i,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{l_{i,j-1/2}} + \aleph_{i+1/2,j}^H \frac{2h_{i,j+1/2}^3 g_{i,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i,j+1}}{l_{i,j+1/2}} \\ + \aleph_{i,j-1/2}^V \frac{2h_{i-1/2,j}^3 g_{i-1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{l_{i-1/2,j}} + \aleph_{i,j+1/2}^V \frac{2h_{i+1/2,j}^3 g_{i+1/2,j}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j}}{l_{i+1/2,j}} \\ + \aleph_{i-1/2,j-1/2}^D \frac{2h_{i-1/2,j-1/2}^3 g_{i-1/2,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j-1}}{l_{i-1/2,j-1/2}} \\ + \aleph_{i+1/2,j+1/2}^D \frac{2h_{i+1/2,j+1/2}^3 g_{i+1/2,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j+1}}{l_{i+1/2,j+1/2}} \\ + \aleph_{i-1/2,j+1/2}^A \frac{2h_{i-1/2,j+1/2}^3 g_{i-1/2,j+1/2}}{3\mu} \frac{P_{i,j-1} - P_{i-1,j}}{l_{i-1/2,j+1/2}} \\ + \aleph_{i+1/2,j-1/2}^A \frac{2h_{i+1/2,j-1/2}^3 g_{i+1/2,j-1/2}}{3\mu} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j+1}}{l_{i+1/2,j-1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Równanie powyższe odnoszące się do ciśnień we wszystkich węzłach może być zapisane w sposób:

$$\begin{aligned} \{ \aleph_{i,j}^N = 1 \Rightarrow M_{i,j} P_{i-1,j-1} + A_{i,j} P_{i-1,j+1} + B_{i,j} P_{i-1,j} + C_{i,j} P_{i,j-1} + D_{i,j} P_{i,j} \\ + E_{i,j} P_{i,j+1} + F_{i,j} P_{i+1,j} + G_{i,j} P_{i-1,j+1} + N_{i,j} P_{i+1,j-1} = R_{i,j} \}_{i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J} \end{aligned} \quad (79)$$

Równanie (79) ma sens dla danego węzła  $(i, j)$ , jeśli odpowiadający mu węzłowy parametr istnienia  $\aleph_{i,j}^N$  jest równy jedności. Współczynniki  $M_{i,j}, A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}, E_{i,j}, F_{i,j}, G_{i,j}, N_{i,j}$ , tego równania oraz wyraz wolny  $R_{i,j}$  wyznacza się bezpośrednio z równania (78), a następnie modyfikuje w zależności od przyjętych warunków brzegowych. Warunki te podobne są jak w przypadku siatki ortogonalnej, z dodatkowymi warunkami na narożach  $(i = 0, j = 0)$ ,  $(i = I + 1, j = J + 1)$ ,  $(i = I + 1, j = 0)$ ,  $(i = 0, j = J + 1)$ , o ile każdemu z węzłów narożnym odpowiada niezerowy parametr istnienia.

Układ równań (79) zapisać można w następującej postaci macierzowej:

$$\mathbf{W} \mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (80)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest wektorem poszukiwanych wartości ciśnienia w poszczególnych węzłach ortogonalnej siatki szczelin danym wzorem (68),  $\mathbf{R}$  jest wektorem wyrazów wolnych danym wzorem (69), a  $\mathbf{W}$  jest nonadiagonalną macierzą współczynników. Równanie macierzowe (80) rozwiązać można metodami algebry liniowej. Ze względu na duże na ogół wymiary nonadiagonalnej macierzy współczynników efektywne obliczenia przeprowadzić można dysponując odpowiednią mocą i pamięcią komputerów.

Znajomość wartości ciśnień w poszczególnych węzłach siatki szczelin pozwala na wyznaczenie natężeń przepływu w poszczególnych podszczelinach. Można tego dokonać korzystając bezpośrednio z formuł (34) – (37) oraz (73) – (76). Wyznaczenie natężeń przepływów we wszystkich podszczelinach umożliwia bezpośrednią identyfikację kanałów preferencyjnych.



## Podziękowanie

Praca niniejsza zrealizowana została w 2009 roku w ramach prac statutowych Instytutu Mechaniki Górnotworu PAN, nr KII/ZV/P1, kierunek: *Matematyczne i numeryczne modelowanie i monitoring zjawisk zachodzących w górotworze oraz w wybranych strukturach technicznych i przyrodniczych*, temat: *Modelowanie przepływów w ośrodkach porowatych z uwzględnieniem efektów nieliniowych oraz oddziaływań międzyfazowych*, zadanie badawcze: *Analiza przepływów laminarnych w ośrodkach szczelinowych z uwzględnieniem efektów na styku szczelin*.

## Literatura

- Batchelor G.K., (1967): *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Berker R., (1936): *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Paris.
- Berker R., (1963): *Mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, in *Handbuch der Physik*, herausgegeben von S. Flügge und C. Truesdel, Bd. VIII//2 *Strömungsmechanik II*, Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg.
- Frankel R.E., (1962): *Laminar Flow in Symmetric Channels with Slightly Curved Walls. I. On the Jeffrey-Hamel Solutions for Flow between Plane Walls*, Proceedings of The Royal Society (London), **A267**, 119.
- Frankel R.E., (1963): *Laminar Flow in Symmetric Channels with Slightly Curved Walls. II. An Asymptotic Series for the Stream Function*, Proceedings of The Royal Society (London), **A272**, 406.
- Frankel R.E., (1973): *On the Theory of Laminar Flow in Channels of a Certain Class*, Proceedings of The Cambridge Philosophical Society, **73**, 361.
- Hamel G., (1916): *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, **25**, 34.
- Jeffrey G.B., (1915): *The Two-Dimensional Steady Flow of a Viscous Fluid*, Philosophical Magazine, **29**, 455.
- Kotchin N.E., Kibel I.A., Roze N.V., (1955): *Teoretichesкая gidromekhanika*, Vol. 1, 2, Moskva.
- Landau L.D., Lifszyc E.M., (1958): *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa.
- Rosenhead L., (1940): *The Steady Two-Dimensional Radial Flow of Viscous Fluid between Two Inclined Plane Walls*, Proceedings of The Royal Society (London), **A175**, 436.
- Sławomirski M.R., (1996): *Stochastyczny model przepuszczalności ośrodka szczelinowego*, Grant KBN no. 9T12B03109.
- Sławomirski M.R., (2009): *Creeping Flows through Pseudoorthogonal Systems of Thin Fractures*, Archives of Mining Sciences, **54**, 393.
- Zhel'tov Yu.P., (1962): *Issledovaniye protsesov deformatsii i filtratsii v neftyanykh plastakh pri ikh razrabotke*, rozprawa doktorska, V.N.I.I. [Soviet Federal Petroleum Institute].

## The analysis of laminar flows through fractured materials

### Abstract

The paper considers flows of fluids through fractures, sequences of fractures, and systems of intersecting fractures. It has been assumed that each fracture may consist of a sequence of subfractures of various lengths, thicknesses, and depths. Taking into account that in the genuine rock mass the fractures are slim (especially for deep natural rock strata for which fractures thickness is several orders of magnitude less than their lengths), it has been assumed that fluid motion through a system of fractures is represented by creeping flow. Consequently, the inertia and vortex effects have been regarded to be negligible in comparison to viscous effects. In the case when the walls of a subfracture differ slightly from two parallel plates, the thickness of the subfracture  $2h$  has been replaced by the reduced thickness  $2\bar{h}$  the magnitude of which was determined basing on the geometric parameters of the fracture. Fracture connecting zones have been approximated by means of combinations of inclined planes and hyperbolic cylinders. The author has considered the flows through systems of various topologies: sequences of fractures, systems of orthogonal fractures, systems of pseudo-orthogonal fractures, systems of quasi-irregular fractures. A pseudo-orthogonal system of fractures is obtained from the orthogonal system applying homeomorphic transformation. A quasi-irregular system of fractures may be obtained from the pseudo-orthogonal system in non-homeomorphic manner introducing diagonal and antidiagonal subfractures which connect the nodes of the system in direct manner. The introduction of the existence parameters with respect to nodes, primary subfractures, and diagonal and antidiagonal subfractures, and variation of the mode of assignment of indices for nodes of the grid enables us to describe a large class of topologies of fracture systems encountered in subsurface rock mass. The author has presented the technique to determine the pressure for each of nodes of the grid, and to determine the flow rate and mean velocity for each of subfractures constituting the system for the defined boundary conditions. The problem of the so-called preference channels has been discussed. For the approach to the problem applied by the author the preference channels are

created in the 'natural manner', and they are implied by non-homogeneity of geometric parameters of subfractures. It has been demonstrated that the anisotropy of fractured systems often encountered in engineering practice do not require the defined direction of the majority of fractures. The anisotropy may also be implied by non-homogeneity of geometric parameters of subfractures.

**Keywords:** underground hydrodynamics, fractured systems, creeping flow, mathematical modelling