

Analiza konfiguracji przestrzennej układu nadajnik-detektor w anemometrze z oddziaływaniem cieplnym

ANDRZEJ RACHALSKI

Instytut Mechaniki Górotworu PAN, ul. Reymonta 27; 30-059 Kraków

Streszczenie

Przedstawiono analizę pomiaru prędkości przepływu gazu metodą fal cieplnych. Rozpatrzono wybrane konfiguracje przestrzenne układu nadajnik-detektor. Dla analizowanych konfiguracji przedstawiono dyskusję błędów wyznaczania prędkości w układzie z jednym i dwoma detektorami fali.

Słowa kluczowe: pomiary prędkości przepływu, termoanemometria, fale cieplne

Lista symboli

c	– ciepło właściwe płynącego gazu
i	– jednostka urojona
l	– połowa długości detektora
r	– odległość od źródła fali
t	– czas
x	– odległość detektora od źródła fali
A	– część rzeczywista wyrażenia $\sqrt{1+iP}$
B	– część urojona wyrażenia $\sqrt{1+iP}$
P	– bezwymiarowy parametr $P = \frac{4\kappa\omega}{U^2}$
K	– funkcja Bessela
Q	– intensywność źródła fali cieplnej
U_R	– prędkość przepływu rzeczywista
U_C	– prędkość przepływu obliczona
ζ	– zespolony argument
δ	– funkcja Diraca
$\Delta\varphi$	– przesunięcie fazy fali na detektorach
Δx	– odległość między detektorami
$\varepsilon_U, \varepsilon_{pio}^I, \varepsilon_{poz}^I$	– względne błędy obliczonej prędkości
k	– dyfuzyjność cieplna gazu
r	– gęstość gazu
ω	– częstotliwość fali cieplnej
θ	– zredukowana temperatura gazu
Γ	– funkcja Γ Eulera
Θ	– amplituda fali cieplnej
∇^2	– operator Laplace'a

1. Wstęp

Jednym z tematów prac prowadzonych w Pracowni Metrologii Przepływów Instytutu Mechaniki Górotworu PAN są badania anemometrów z oddziaływaniem cieplnym. W ostatnich latach opracowano różnicowy anemometr z falą cieplną przeznaczony do bardzo dokładnych pomiarów prędkości w zakresie $0,1 \div 3$ m/s [1]. Prezentowane badania są kontynuacją prac prowadzonych w latach ubiegłych i celem ich jest dalsze rozwinięcie metody fal cieplnych w aspekcie jej zastosowania do przepływów o zmiennym kierunku. Idea pomiaru prędkości przepływu gazu metodą fal cieplnych polega na pomiarze różnicy fazy fali cieplnej w dwóch punktach przestrzeni o znanej odległości. W tym celu należy zmierzyć przesunięcie fazy fali pomiędzy detektorem a nadajnikiem, lub pomiędzy dwoma detektorami. Pomiar przepływów o zmiennym kierunku wektora prędkości wymagają zastosowania czujników, w których nadajnik i detektor nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wstępne badania takiego układu przeprowadzono w roku ubiegłym [2] i wykazały one możliwość zastosowania takiej konfiguracji nadajnik-detektor w pomiarach. W dalszym ciągu zostanie przedstawione uzasadnienie teoretyczne zastosowania w układzie anemometru z falą cieplną detektora umieszczonego prostopadle względem nadajnika fali oraz dyskusja niedokładności wyznaczania prędkości przepływu gazu dla układu z jednym i dwoma detektorami fali, przy równoległym i prostopadłym położeniu detektora względem nadajnika.

2. Analiza teoretyczna

Rozchodzenie się fali cieplnej w gazie opływającym źródło z prędkością U opisać można następującym równaniem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - U \text{grad} T + \frac{1}{\rho c} Q(t) \quad (1)$$

W układzie odniesienia jak na rys. 1a periodycznie zmienną intensywność nieskończonego liniowego źródła opisać można zależnością $Q(t) = Q_0 \delta(x_0) \delta(y_0) \exp(-i\omega t)$. Przyjmując, że prędkość przepływu U_R jest skierowana zgodnie z osią OX otrzymujemy rozwiązanie równania (1) podane przez Kiełbasę [3]:

$$\theta(x, y, t) = \frac{Q_0}{2\pi\kappa\rho c} \exp\left(-i\omega t + \frac{U_R x}{2\kappa}\right) K_0\left(\frac{U_R r}{2\kappa} \sqrt{1 + \frac{i4\kappa\omega}{U_R^2}}\right) \quad (2)$$

Wyliczyć stąd można przesunięcie fazy fali cieplnej jako funkcję odległości od źródła fali i częstotliwości:

$$\Delta\varphi(r, \omega, \kappa, U_R) = \frac{U_R r}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+P^2} - 1)} + \frac{1}{4} \arctan P \quad (3)$$

oraz amplitudę:

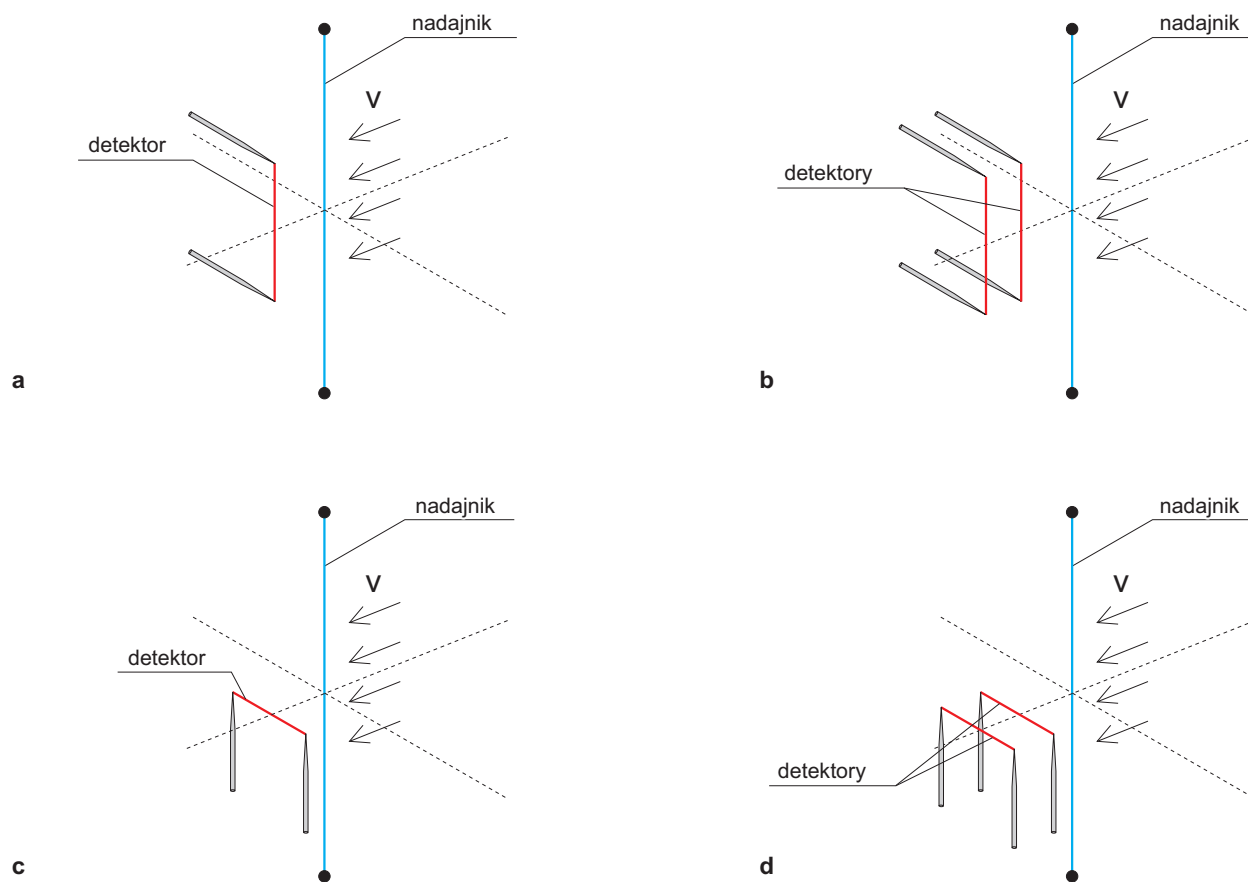
$$\Theta(x, r, \omega, \kappa, U_R) = \frac{Q_0}{2\pi\kappa\rho c} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{U_R r}} [1+P^2]^{-\frac{1}{8}} \exp\left[\frac{U_R}{2\kappa} \left(x - r \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+P^2})}\right)\right] \quad (4)$$

gdzie $P = \frac{4\kappa\omega}{U_R^2}$. Wzór (3) można zastosować, po pewnych przekształceniach do wyznaczenia prędkości przepływu U_R . Jeżeli użyjemy dwóch detektorów, to różnica fazy fali rejestrowanej przez detektory wynosi:

$$\Delta\varphi(r, \omega, \kappa, U_R) = \frac{U_R \Delta r}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+P^2} - 1)} \quad (5)$$

Rozwiązanie (2) podaje temperaturę w punkcie odległym o r od źródła liniowego. Wynika stąd, że detektor fali, który jest w postaci cienkiego drutu powinien być umieszczony równoległe do nadajnika (rys. 1a). Jednak, taka konfiguracja nadajnik-detektor nie jest korzystna. Nadajnik umieszczony w przepły-

wie zaburza jednorodne pole prędkości; powstaje strefa o zmniejszonej prędkości (tzw. cień prędkości). Jak wynika z badań Kielbasy [4], dla ustalonej współrzędnej x rozkład prędkości można przedstawić w postaci krzywej dzwonowej Gaussa z maksimum dla $y = 0$.



Rys. 1. Konfiguracja układu nadajnik-detektor w anemometrze z falą cieplną: a – jeden detektor pionowy, b – dwa detektory pionowe, c – jeden detektor poziomy, d – dwa detektory poziome

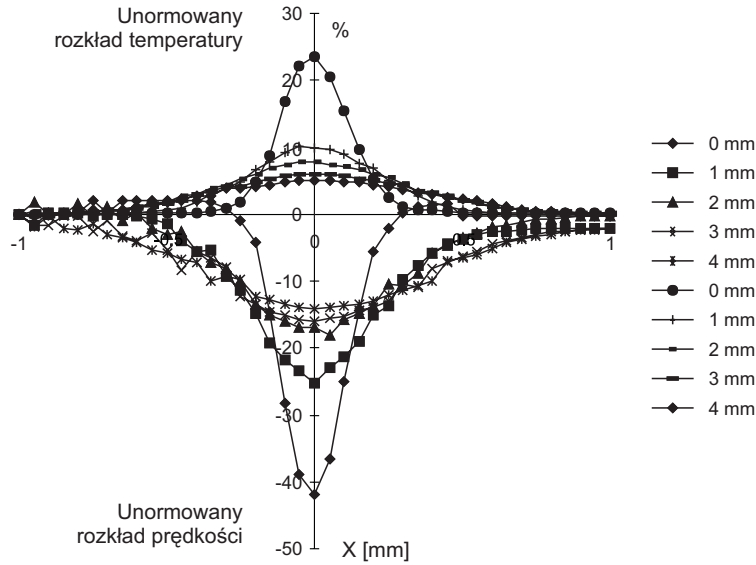
Na rys. 2 przedstawiono unormowane rozkłady temperatury i prędkości. Ze wzrostem odległości wartość maksimum krzywej maleje a jej szerokość połówkowa rośnie. Zaburzenie to rozciąga się na odległość kilku tysięcy średnic włókna nadajnika. Jeżeli odbiornik fali jest umieszczony pionowo za nadajnikiem, wzdłuż osi przepływu, to całe włókno odbiornika jest położone w obszarze najbardziej zaburzonym. Dlatego też konfiguracja odbiornika fali położonego prostopadle do nadajnika i wektora mierzonej prędkości jest korzystniejsza. W takiej konfiguracji, przedstawionej na rys. 1c, detektor rejestruje uśrednioną temperaturę gazu na odcinku $2l$, która będzie równa:

$$\theta_l(x, t, l) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \theta(x, y, t) dy = \frac{1}{l} \int_0^l \theta(x, y, t) dy \quad (6)$$

W wyrażeniu (6) dokonano zmiany górnej granicy całkowania z $(-l, l)$ na $(0, l)$, ponieważ, jak wynika z równ. (2), funkcja podcałkowa θ jest symetryczna względem zmiennej y , gdyż zależy ona od niej tylko poprzez odległość r od źródła fali, która w przyjętym układzie odniesienia jest dana zależnością: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Przedstawiając wewnętrzny pierwiastek w równ. (6) w postaci algebraicznej:

$$\sqrt{1+iP} = A + iB \quad (7)$$

otrzymujemy równ. (5) w postaci:



Rys. 2. Unormowane rozkłady temperatury i prędkości za grzonym włóknem [4]. Cyt. za zgodą Autora

$$\theta_l = \frac{1}{l} \int_0^l \theta(x, y, t) dy = \frac{Q_0}{2\pi\kappa\rho cl} \exp\left(\frac{U_R x}{2\kappa} - i\omega t\right) \int_0^l K_0\left(\frac{U_R}{2\kappa} (A + iB) \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy \quad (8)$$

Podstawiając nową zmienną całkowania ξ : $x^2 + y^2 = \xi x^2$ dostajemy:

$$\int_0^l K_0\left((A + iB) \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy = \frac{x}{2} \int_1^{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\xi} - 1} K_0\left(\frac{U_R x}{2\kappa} (A + iB) \sqrt{\xi}\right) d\xi \quad (9)$$

gdzie $\lambda = \sqrt{1 + \frac{l^2}{x^2}}$. Oznaczmy całkę po prawej stronie równ. (9) przez I_0 :

$$I_0 = \int_1^{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\xi} - 1} K_0\left(\frac{U_R x}{2\kappa} (A + iB) \sqrt{\xi}\right) d\xi \quad (10)$$

Ponieważ funkcja Bessela szybko maleje do zera ze wzrostem argumentu i wyraz z pierwiastkiem jest również malejący (zmienna $\xi > 1$), całkę I_0 przybliżamy całką I_λ :

$$I_\lambda = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\xi} - 1} K_0\left(\frac{U_R x}{2\kappa} (A + iB) \sqrt{\xi}\right) d\xi \quad (11)$$

Porównując całkę I_λ z całką [5]:

$$\int_1^\infty \xi^{-\frac{1}{2}\nu} (\xi - 1)^{\mu-1} K_\nu(a\sqrt{\xi}) d\xi = \Gamma(\mu) 2^\mu a^{-\mu} K_{\nu-\mu}(a) \quad \text{Re } a > 0, \text{ Re } \mu > 0 \quad (12)$$

otrzymujemy: $\nu = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $a = \frac{U_R x}{2\kappa} (A + iB)$. Łatwo sprawdzić, że części rzeczywiste a oraz μ są dodatnie i na podstawie wzoru (12) otrzymujemy:

$$I_\lambda = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{U_R x (A + iB)}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) K_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U_R x}{2\kappa} (A + iB)\right) \quad (13)$$

Biorąc pod uwagę, że $K_{-1/2} = K_{1/2}$ i korzystając ze znanego rozwinięcia funkcji Bessela [6]:

$$K_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp(-\zeta) \quad (14)$$

dostajemy:

$$K_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U_R x}{2\kappa}(A+iB)\right) = \sqrt{\frac{\pi\kappa}{U_R x(A+iB)}} \exp\left(-\frac{U_R x}{2\kappa}(A+iB)\right) \quad (15)$$

Podstawiając równ. (15) do równ. (13) otrzymujemy:

$$I_\lambda = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2\sqrt{\pi}k}{U_R x(A+iB)} \exp\left(-\frac{U_R x}{2\kappa}(A+iB)\right), \quad (16)$$

Podstawiając I_λ z równ. (16) w miejsce I_0 do równ. (9) i dalej do równ. (8) dostajemy:

$$\theta_l(x, t, l) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\rho c l U_R}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{U_R x}{2\kappa}B + \arctan\frac{B}{A}\right) - \frac{U_R x}{2\kappa}(A-1)\right). \quad (17)$$

Obliczone stąd przesunięcie fazowe fali wynosi:

$$\varphi_l = \frac{U_R x}{2\kappa}B + \frac{1}{2} \arctan\frac{B}{A}, \quad (18)$$

a amplituda fali temperaturowej jest równa:

$$\Theta_l(x, t, l) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\rho c l U_R}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \exp\left(-\frac{U_R x}{2\kappa}(A-1)\right). \quad (19)$$

Wyliczając bezwymiarowe parametry A i B z równ. (7) dostajemy

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+P^2}+1\right)}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+P^2}-1\right)} \quad (20)$$

i po wstawieniu do równ. (18) i (19), otrzymujemy wyrażenia na różnicę fazy oraz amplitudę fali temperaturowej dla detektora położonego prostopadłe względem nadajnika fali:

$$\varphi_l = \frac{U_R x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+P^2}\right)-1} + \frac{1}{2} \arctan P. \quad (21)$$

$$\Theta_l(x, t, l) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\rho c l U_R}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt[4]{1+P^2}} \exp\left(-\frac{U_R x}{2\kappa}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+P^2}\right)+1}-1\right)\right) \quad (22)$$

Jeżeli użyjemy dwóch detektorów prostopadłych do nadajnika odległych od siebie o Δx (rys. 1d), to różnica fazy fali cieplnej rejestrowanej przez detektory wynosi:

$$\varphi_l = \frac{U_R \Delta x}{2\kappa} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+P^2}\right)-1}. \quad (23)$$

Powyższy wzór jest identyczny z równ. (5) na przesunięcie fazy w układzie dwóch detektorów równoległych do nadajnika, co pokazuje, że w układzie z dwoma detektorami uzyskujemy tę samą dokładność pomiaru fazy, niezależnie od tego czy detektory są równoległe, czy prostopadłe do nadajnika fali.

3. Dokładność wyznaczenia prędkości w różnych konfiguracjach układu detektor-nadajnik

Związek między prędkością fali, częstotliwością, przesunięciem fazowym i odległością zastosowany do wyznaczenia prędkości przepływu przedstawia zależność:

$$U_C = \frac{\omega \Delta x}{\Delta \varphi} \quad (24)$$

Rzeczywista zależność między prędkością a przesunięciem fazowym jest opisana, w zależności od konfiguracji nadajnik detektor równ. (3), (5) oraz (21), (23) a nie równ. (24). Względna niedokładność wyznaczonej prędkości U_C wynosi:

$$\varepsilon_U = \frac{U_C}{U_R} - 1. \quad (25)$$

Dla układu z dwoma detektorami fali, korzystając ze wzorów (5) i (23) na przesunięcie fazy, w których zaniedbujemy wyrazy zawierające $\arctan P$ obliczona niedokładność wynosi:

$$\varepsilon^{II}(U_R, \omega) = \frac{U_C}{U_R} - 1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+P^2} + 1 \right)} - 1. \quad (26)$$

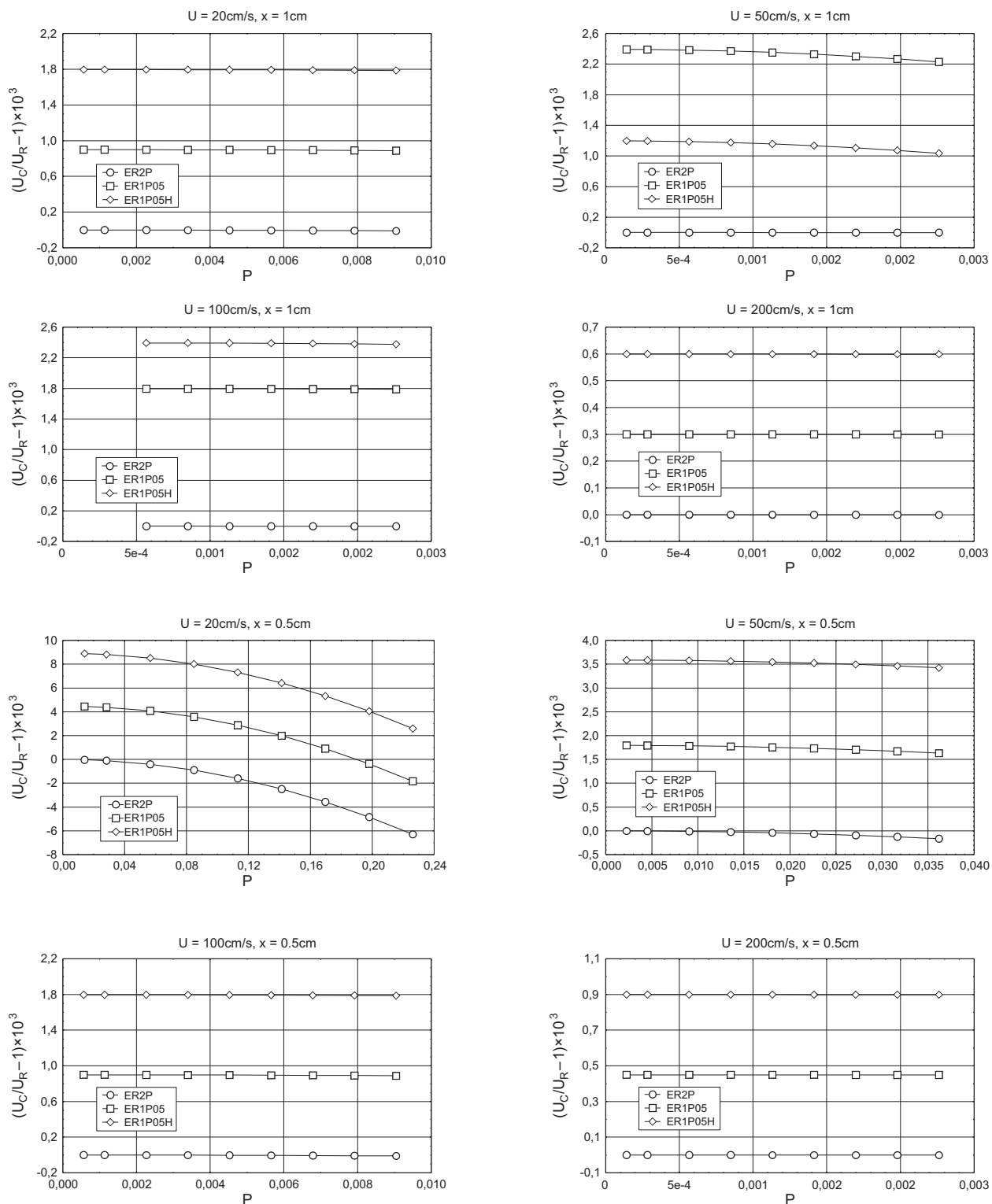
W układzie z pojedynczym detektorem niedokładności są równe:

$$\varepsilon_{pio}^I(U_R, \omega, x) = \frac{U_C}{U_R} - 1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+P^2} + 1 \right)}}{1 + \frac{U_R}{4\omega x} \arctan P \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+P^2} + 1 \right)}} - 1 \quad (27)$$

dla detektora równoległego, a dla detektora prostopadłego do nadajnika:

$$\varepsilon_{poz}^I(U_R, \omega, x) = \frac{U_C}{U_R} - 1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+P^2} + 1 \right)}}{1 + \frac{U_R}{2\omega x} \arctan P \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+P^2} + 1 \right)}} - 1. \quad (28)$$

Jak widać z powyższych zależności, niedokładność jest funkcją parametru P , w którym występują prędkość przepływu U_R , częstotliwość fali ω oraz współczynnik przewodnictwa temperaturowego gazu κ . W przypadku jednego detektora pojawia się zależność od odległości x detektora od nadajnika. Na rys. 3 przedstawiono obliczoną zależność niedokładność wyznaczenia prędkości przepływu w funkcji parametru P . Jak widać, układ z dwoma detektorami jest dokładniejszy od układu z pojedynczym detektorem. Dla wszystkich konfiguracji dokładność rośnie ze wzrostem prędkości. Wynika to stąd, że pierwiastek w równ. (26), (27) i (28) maleje ze wzrostem prędkości. Można zaobserwować, że prędkość wyznaczona w układach z pojedynczym detektorem jest większa od rzeczywistej, natomiast układ z podwójnym detektorem podaje zaniżoną wartość prędkości.



Rys. 3. Niedokładność wyznaczonej prędkości w funkcji parametru P

5. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że dokładność wyznaczenia prędkości przepływu w układzie z dwoma detektorami jest taka sama przy równoległym położeniu detektora do nadajnika jak i prostopadłym. Różnica pojawia się wtedy, gdy zastosujemy pojedynczy detektor fali; w tym przypadku układ z prostopadłym detektorem jest mniej korzystny. Ponieważ anemometr z falą cieplną ma być stosowany jako narzędzie do bardzo precyzyjnych pomiarów prędkości, z przedstawionej analizy wynika, że należy stosować układ z dwoma detektorami fali.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w ramach działalności statutowej IMG PAN w roku 2006.

Literatura

- [1] Kielbasa J. i in.: *Eksperymentalna weryfikacja wielokanałowego termoanemometrycznego systemu pomiarowego jako anemometru z falą cieplną*, Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN, 2004, t. 6, nr 3-4, s. 205-216.
- [2] Gawor M., Rachalski A.: *Implementacja i badania parametrów metrologicznych różnicowego anemometru z falą cieplną w adaptacyjnym komputerowym systemie termoanemometrycznym*, Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN 2005, t. 7, nr 1-2, s. 87-99.
- [3] Kielbasa J.: *Fale cieplne w przepływie ustalonym. Warunki ich wykorzystania do pomiaru prędkości przepływu ustalonego*, Archiwum Górnictwa 2005.
- [4] Kielbasa J.: *Ślad cieplny i aerodynamiczny za grzanym włóknem*, XIII Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Częstochowa 1998, s. 289-294.
- [5] Gradsztajn I.S., Ryzik I.M.: *Tablice całek, sum, szeregów*, Moskwa 1962, s. 717.
- [6] Korpala E.: *Funkcje specjalne*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2001, s. 77.

The Analysis of Spatial Transmitter–Detectors System in Anemometer with Thermal Interaction

Abstract

In current paper the method of gas flow velocity measurement by means thermal waves has been analysed. Two different orientations of the detector with respect to transmitter have been discussed. For discussed transmitter-detector systems the analysis of accuracy of flow measurements have been performed.

Keywords: flow velocity measurements, thermoanemometry, thermal waves

Recenzent: Prof. dr hab. inż. *Stanisław Gumuła*, AGH